

2013年1月31日

---

## 3彩色問題

---

東京電機大学大 理学系

09RU062

09RU073

指導教員 中野 哲夫

# 概要

---

平面上の与えられた地図を，隣接する国が異なる色になるように3色で塗れるかどうか (**3彩色問題**) をグレブナ基底を用いて判定する方法を，[1], [2] に従って解説する．

平面上の**地図の3彩色問題**は，地図に対応する（双対）**グラフの3彩色問題**と同値であるので，**グラフの3彩色問題**を説明する．

また，グラフを入力すると，そのグラフが**3彩色可能**かどうかを判定し，更に，**3彩色可能**な場合はすべての塗り方の集合を出力するプログラム **color3** を数式処理システム Magma に実装することができたので，その結果も報告する．

# 目次

---

1. 3彩色問題の判定法
2. 塗り方の総数と有限次元代数
3. 3彩色プログラム
4. 関東甲信越・EUの塗り分け
5. 参考文献

# 1 3彩色問題の判定法

---

平面上に  $n$  個の国からなる地図が与えられたとして、  
この地図を、隣接する国が異なる色になるように塗る問題を考える。

平面上の任意の地図は、4色あれば、隣接する国が異なる色になるように塗れる  
(4彩色可能)であることが Appel と Haken によって1976年に証明されている。  
3色のみを用いる場合は、3彩色可能な地図と不可能な地図が両方とも存在する。  
ここでは、3彩色問題を連立方程式を用いて定式化し、グレブナ基底を用いて、  
3彩色可能・不可能の判定をする方法を説明する。

まず、与えられた  $n$  個の国をもつ地図にたいして、 $n$  個の頂点  $x_1, \dots, x_n$  を用意する。  
さらに、2つの国  $x_i, x_j$  が隣接するとき、かつそのときに限り、2頂点  $x_i, x_j$  を1つの  
辺で結んで、その地図の(双対)グラフ  $F$  を構成する。

以下では、このグラフ  $F$  の各頂点を、辺で結ばれる頂点が異なる色になるように  
3彩色可能かどうかを議論することにする。

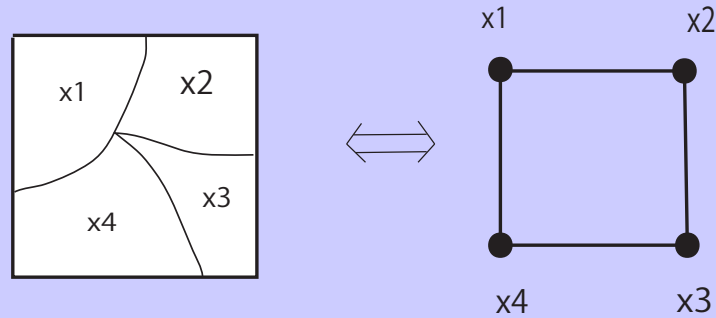


図1 地図とそのグラフ

$\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i} \in \mathbb{C}$  を1の原始3乗根とする．すなわち，方程式  $z^3 = 1$  の3つの複素数解は， $1, \omega, \omega^2$  である．与えられた  $n$  個の頂点をもつグラフにたいして， $x_1, \dots, x_n$  をグラフ  $F$  のそれぞれの頂点を表す変数とし，多項式環  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を用意する．そこで，各頂点にそれぞれ， $1, \omega, \omega^2$  のうちの1つの値を割り当てることにする．これは次の方程式で表すことができる．

$$x_i^3 - 1 = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

さらに，頂点  $x_i$  および  $x_j$  が辺で接続される場合，それらは  $\{1, \omega, \omega^2\}$  のうち，異なる値をもつ必要がある．

## 補題 1.1

---

グラフ  $F$  の  $n$  個の頂点  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) が  $x_i^3 = 1$  をみたすとする。このとき、

$$x_i \neq x_j \iff x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0$$

証明

$\Rightarrow$ :  $x_i \neq x_j$  とせよ。  $x_i^3 = x_j^3$  より

$$0 = x_i^3 - x_j^3 = (x_i - x_j)(x_i^2 + x_i x_j + x_j^2)$$

である。  $x_i \neq x_j$  より  $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0$  を得る。

$\Leftarrow$ : 背理法により示す。仮に  $x_i = x_j$  とせよ。

これを  $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0$  に代入すると

$3x_i^2 = 0$  すなわち  $x_i = 0$  となり  $x_i^3 = 1$  に矛盾する。 □

したがって  $x_i$  と  $x_j$  が異なる値の場合に限り、 $x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 = 0$  となる。

## 定義 1.2

---

$F$  を  $n$  個の頂点  $x_1, \dots, x_n$  をもつグラフとする .

$$I := \langle x_i^3 - 1, x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 \mid 1 \leq i \leq n, \{x_i, x_j\} \text{ は辺で結ばれる} \rangle \subset \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

と定義し ,

$I$  をグラフ  $F$  の**3彩色イデアル**と呼ぶ .

## 定理 1.3

---

$\mathbb{V}(I)$  をイデアル  $I$  のアフィン多様体 ( $I$  の生成元を方程式とみなしたときの解集合) とおく . グラフ  $F$  の3彩色イデアルを  $I$  とする . このとき次の同値が成立する .

$$\text{グラフ } F \text{ は3彩色可能} \iff \mathbb{V}(I) \neq \emptyset$$

これより , **3彩色可能**かどうかは  $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$  かどうかでわかる .

## 定理 1.4(弱形の Hilbert 零点定理)

---

$k$  を代数的閉体とし,  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  をイデアルとする.

このとき次の同値が成立する.

$$\mathbb{V}(I) = \emptyset \iff I = \langle 1 \rangle = k[x_1, \dots, x_n].$$

さらに, グレブナ基底の理論から, 次が成立する.

## 定理 1.5

---

$I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  をイデアルとし, 任意の単項式順序に関する  $I$  の簡約グレブナ基底を  $G$  とする. このとき, 次の同値が成立する.

$$I = \langle 1 \rangle \iff G = \{1\}.$$

定理 1.3, 1.4, 1.5 を組み合わせて, グラフ  $F$  が3彩色可能であるための次の必要十分条件が得られた.

## 定理 1.6

---

グラフ  $F$  が**3彩色可能**  $\iff F$  の**3彩色イデアル**の簡約グレブナ基底は  $\{1\}$  でない.



## 例1.7

図2のグラフ  $F_1$  を考える .

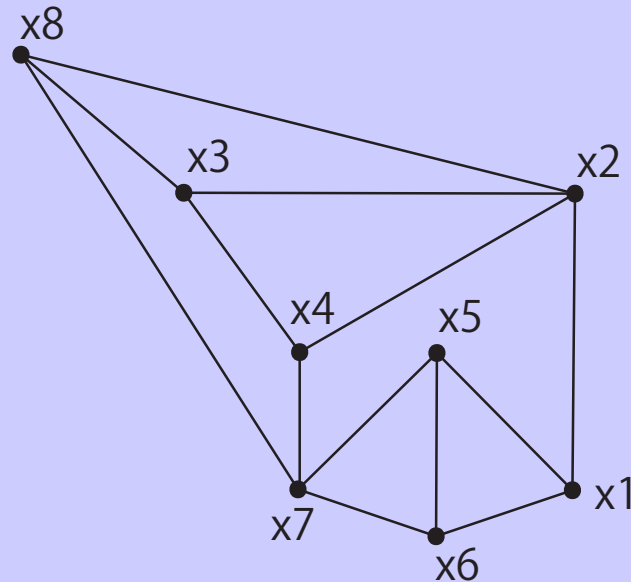


図2 グラフ  $F_1$

$F_1$  の3彩色イデアル  $I_1$  は ,  $I_1 := \langle x_i^3 - 1 \mid 1 \leq i \leq 8 \rangle + \langle x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 \mid (i, j) \in \{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 8), (3, 4), (3, 8), (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7), (7, 8)\} \rangle$  で与えられる .  $I_1$  の簡約グレブナ基底  $G_1$  を計算すると ( $x_1 > x_2 > \cdots > x_8$  なるlex順序を使用) ,

$G_1 = \{x_1 - x_7, x_2 + x_7 + x_8, x_3 - x_7, x_4 - x_8, x_5 + x_7 + x_8, x_6 - x_8, x_7^2 + x_7x_8 + x_8^2, x_8^3 - 1\}$   
を得る。  $G_1 \neq \{1\}$  なので、定理 1.6 より  $F_1$  は**3彩色可能**である。

次に、1つの具体的な塗り方を与えるために、 $G_1$  の定める連立方程式を解く。使用している3色は**1(赤)**、 **$\omega$ (青)**、 **$\omega^2$ (緑)**であることに注意。簡約グレブナ基底  $G_1$  において、

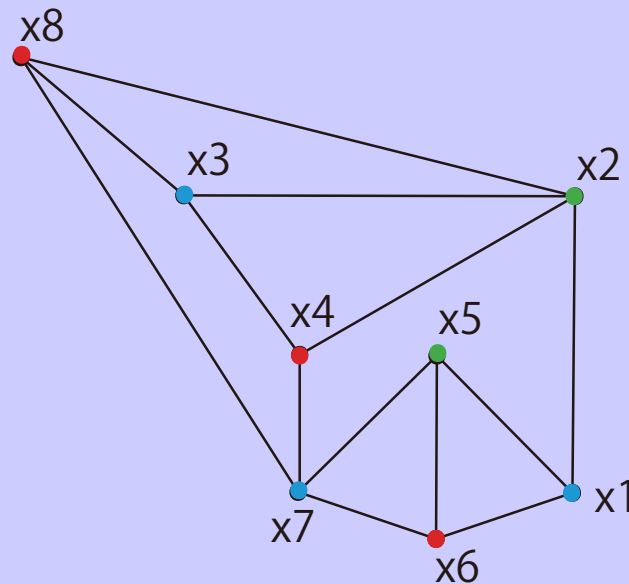


図3 グラフ  $F_1$

このように、lex 順序に関する簡約グレブナ基底から、小さい変数から順番に値を代入によって定めていく方法を、**後退代入**と呼ぶ。

## 例1.8

図3のグラフ  $F_2$  を考える .

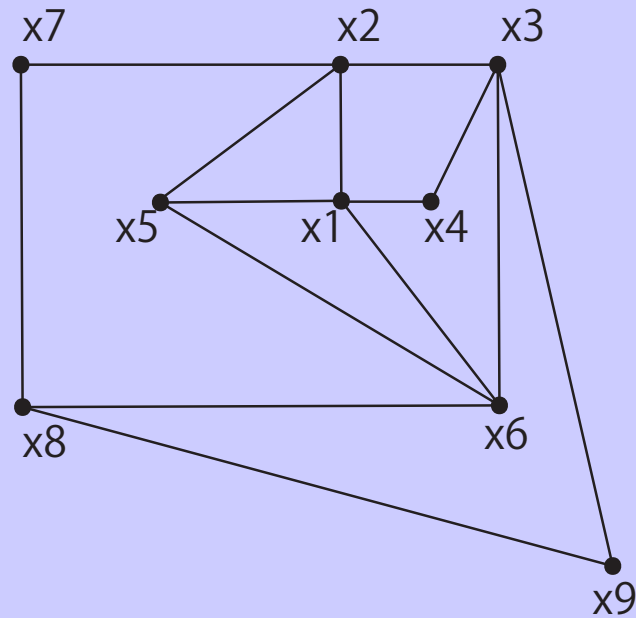


図4 グラフ  $F_2$

$F_2$  の3彩色イデアル  $I_2$  は ,

$$I_2 := \langle x_i^3 - 1 \mid i = 1, \dots, 9 \rangle + \langle x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 \mid (i, j) \in$$

$\{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 6), (3, 9), (5, 6), (6, 8), (7, 8), (8, 9)\}$

で与えられる .  $I_2$  の簡約グレブナ基底  $G_2$  を計算すると  $(x_1 > x_2 > \dots > x_8 > x_9$  なる lex 順序を使用 ) .

$G_2 = \{x_9^3 - 1, x_8^2 + x_8x_9 + x_9^2, (x_7 - x_9)(x_7 + x_8 + x_9), x_6 + x_7 + x_8,$   
 $(-x_5 + x_7)(-x_5 + x_8), (x_5 - x_9)(x_4x_7 + x_4x_8 + x_7x_8 + x_4x_9 + x_7x_9 + x_8x_9),$   
 $(x_4 - x_5)(x_4 + x_7 + x_8), x_3x_7 + x_3x_8 - x_7x_8 + x_3x_9 + x_9^2, x_3x_4 + x_4x_5 - x_4x_7$   
 $+ x_5x_7 - x_4x_8 + x_5x_8 - x_3x_9 - x_9^2, x_3^2 + x_3x_9 + x_9^2, x_2 + x_7 + x_8, x_1 + x_5 - x_7 - x_8\}$   
を得る .

$G_2 \neq \{1\}$ なので , 定理1.6よりグラフ  $F_2$  は **3 彩色可能**であることが分かる .

## 例1.9

例1.7.のグラフ  $F_1$  で  $x_2$  と  $x_5$  を接続したグラフ  $F_3$  を考える .

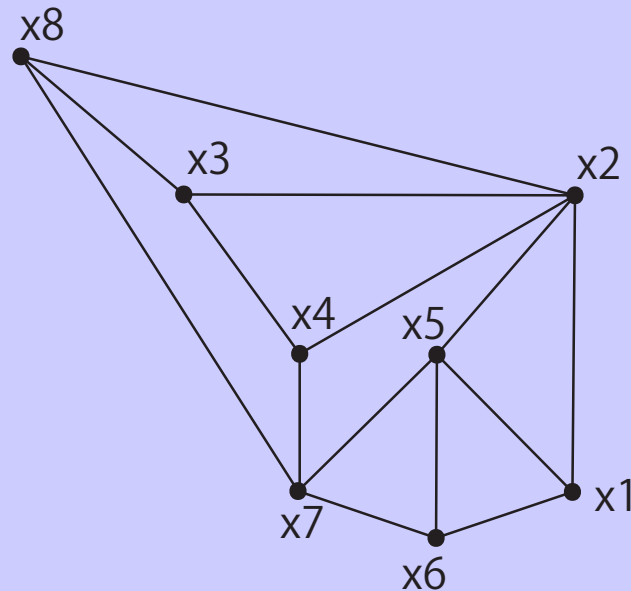


図5 グラフ  $F_3$

$F_3$  の3彩色イデアル  $I_3$  は  $I_3 := \langle x_i^3 - 1 \mid i = 1, \dots, 8 \rangle + \langle x_i^2 + x_i x_j + x_j^2 \mid (i, j) \in \{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 8), (3, 4), (3, 8), (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7), (7, 8)\} \rangle$  で与えられる .  $I_3$  の簡約グレブナ基底  $G_3$  を計算すると

(  $x_1 > x_2 > \dots > x_8$  なる lex 順序を使用 ),  $G_3 = \{1\}$  を得る . ゆえに定理1.6よりグラフ  $F_3$  は3彩色不可能であることが分かる .

## 2 塗り方の総数と有限次元代数

---

多項式環  $k[x_1, \dots, x_n]$  をイデアル  $I$  で割った剰余環  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  が  $k$  上有限次元のベクトル空間（有限次元代数）になるようなイデアル  $I$  を **0次元イデアル**と呼ぶ。

剰余環  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  とは,  $I$  を法とした合同関係の同値類の集合の作る環

$$k[x_1, \dots, x_n]/I := \{[f] \mid f \in k[x_1, \dots, x_n]\}$$

である。ただし, 2つの同値類  $[f], [g]$  が等しいとは  $[f] = [g] \Leftrightarrow f - g \in I$  であることと定義し,

同値類の加法と乗法をそれぞれ,  $[f] + [g] := [f + g]$ ,  $[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$  で定める。

割算アルゴリズムを用いると, イデアル  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  を法とした合同関係の同値類の代表系を, 次のような簡単な形で構成できる。

## 命題2.1

---

$k[x_1, \dots, x_n]$  上の多項式順序を1つ固定． $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  をイデアルとする．

$I$  の元の先頭項で生成されたイデアルを  $\langle \text{LT}(I) \rangle$  とする．

(i) 各  $f \in k[x_1, \dots, x_n]$  は， $\langle \text{LT}(I) \rangle$  に含まれない多項式の  $k$  線型結合で表されるある多項式  $r$  と  $I$  を法として合同．(そのような多項式は一意的である．)

(ii)  $\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$  は  $I$  を法として線型独立である．

つまり， $\langle \text{LT}(I) \rangle$  に含まれない単項式  $x^\alpha$  の線型結合が  $\sum_\alpha C_\alpha x^\alpha \equiv 0 \pmod{I}$  を満たすならば， $C_\alpha = 0$  が  $\forall \alpha$  に対して成り立たなければならない．

## 系2.2

---

$\{x^\alpha : x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle\}$  は，剰余環  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  の  $k$  ベクトル空間としての基底である．





同じイデアル  $I$  で，別の単項式順序  $\text{lex}$  順序を用いてみる．変数の順序を  $y > x$  として，グレブナ基底  $G$  を計算すると， $G = \{y - x^7, x^{12} - x^2\}$  を得る．

したがって  $\langle \text{LT}(I) \rangle = \langle y, x^{12} \rangle$  である．

よって，この場合は  $\{1, x, x^2, \dots, x^{11}\}$  が  $\mathbb{R}[x, y]/I$  の基底であって，

次元はやはり  $\dim \mathbb{R}[x, y]/I = 12$  である．

この計算が示すように，どんな単項式順序を選んでも  $\langle \text{LT}(I) \rangle$  に属さない単項式の個数は（有限個である限りは）同じで，剰余環の次元に等しい．

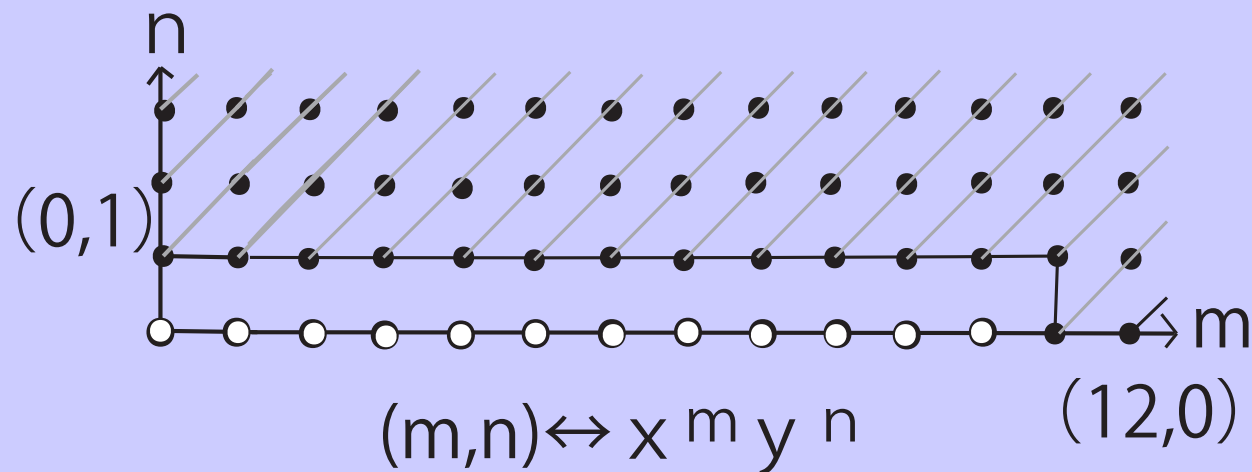


図7 例2.3  $\text{lex}$  順序の図

## 例2.4

イデアル  $I = \langle x - z^2, y - z^3 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y, z]$  を考える .  $x > y > z$  である lex 順序では ,  $I$  の生成元がすでにグレブナ基底になっているので ,  $\langle \text{LT}(I) \rangle = \langle x, y \rangle$  である .

したがって剰余環  $\mathbb{R}[x, y, z]/I$  の基底は  $\{1, z, z^2, \dots\}$  となり無限集合である .

よって次元は  $\dim \mathbb{R}[x, y, z]/I = \infty$  となり , 無限次元である .

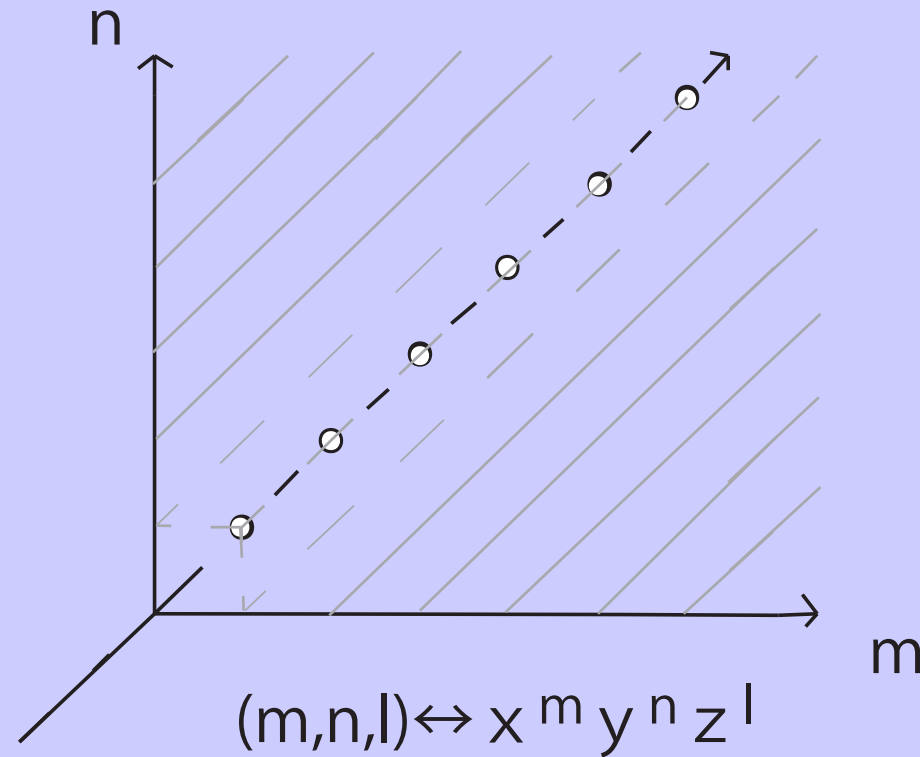


図8 例2.4 lex 順序の図

## 定理 2.5

---

$k$  を代数閉体とし,  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  をイデアルとする.  $V := \mathbb{V}(I)$  を  $I$  の定めるアフィン多様体とすると, 次の5つの主張は同値である.

(i)  $V$  は有限集合である.

(ii) 各  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) について, ある  $m_i \geq 0$  が存在して  $x_i^{m_i} \in \langle \text{LT}(I) \rangle$  となる.

(iii)  $G$  を  $I$  のグレブナ基底とする. このとき, 各  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) について, ある  $m_i \geq 0$  とある  $g \in G$  が存在して  $x_i^{m_i} = \text{LM}(g)$  となる.

(iv)  $k$  上のベクトル空間  $S := \langle x^\alpha \mid x^\alpha \notin \langle \text{LT}(I) \rangle \rangle$  は有限次元である.

(v) 剰余環  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  は  $k$  上有限次元のベクトル空間である.

## 系 2.6

---

$k$  が代数閉体のとき

$V := \mathbb{V}(I)$  は有限集合  $\iff$  剰余環  $k[x_1, \dots, x_n]/I$  は

$k$  上有限次元のベクトル空間である.

## 定義 2.7

---

$I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  をイデアルとする .

- (i)  $\sqrt{I} := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid \text{ある } m \text{ があって } f^m \in I\}$  を  $I$  の根基という .
- (ii)  $I = \sqrt{I}$  が成立するとき ,  $I$  を**根基イデアル**と呼ぶ .

## 定理 2.8

---

$k$  を代数閉体とし ,  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  をイデアルとする .  $V := \mathbb{V}(I)$  は有限集合であると仮定する .

- (i)  $\#V \leq \dim_k k[x_1, \dots, x_n]/I$  である .
- (ii)  $I$  が**根基イデアル**ならば , (i) で等号が成立する .  
すなわち  $\#V = \dim_k k[x_1, \dots, x_n]/I$  である .

$F$  を  $n$  個の頂点をもつグラフとし ,  $I$  を  $F$  の3彩色イデアルとすると , 各  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) について  $x_i^3 - 1 \in I$  だから ,  $V := \mathbb{V}(I)$  は**必ず有限集合** .

## 定義 2.9

---

多項式  $P \in k[x_1, \dots, x_n]$  に対して,

$P$  を既約多項式の積に因数分解して

$P = f_1^{e_1} \dots f_s^{e_s}$  ( $f_i$  は既約多項式,  $e_i \geq 1$ ) と表す .

このとき,  $P$  の被約化 (reduction)  $P_{\text{red}}$  を  $P_{\text{red}} := f_1 \dots f_s$  で定義する .

## 例 2.10

---

$P_{\text{red}}$  は多項式  $P$  の重複した因子を, 重複度 **1** にしたものである .

例えば  $P = (x + y^2)^3(x - y)$  ならば,  $P_{\text{red}} = (x + y^2)(x - y)$  である .

## 命題 2.11

---

$k$  を代数閉体とする .

0次元イデアル  $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$  があったとき , 各  $i = 1, \dots, n$  について  $p_i$  を  $I \cap k[x_i]$  の唯一のモニック (最項次の係数1) な生成元とし  $p_{i,\text{red}}$  を  $p_i$  の被約化とする . このとき  $\sqrt{I} = I + \langle p_{i,\text{red}}, \dots, p_{n,\text{red}} \rangle$  である .

証明

$J := I + \langle p_{i,\text{red}}, \dots, p_{n,\text{red}} \rangle$  と置く .

まず ,  $J$  は**根基イデアル** , すなわち  $J = \sqrt{J}$  を示す .

$k$  が代数的閉体であるから , 各  $i$  について ,

$p_{i,\text{red}} = (x_i - a_{i1})(x_i - a_{i2}) \dots (x_i - a_{id_i})$  と因数分解できる .

$p_{i,\text{red}}$  は重根をもたないので ,  $a_{ij}$  は相異なることに注意する .

このとき ,  $J = J + p_{1,\text{red}} = \bigcap_j (J + \langle x_1 - a_{1j} \rangle)$  (1) が成立する .

実際 , 最初の等号は  $p_{1,\text{red}} \in J$  より従い , 2番目の等号は  $p_{1,\text{red}}$  が異なる根を持つことから従う .

同様に  $J + \langle x_1 - a_{1j} \rangle$  を分解するために  $p_{2,\text{red}}$  を使う.

$J = J + p_{2,\text{red}} = \bigcap_k (J + \langle x_2 - a_{2k} \rangle)$  を (1) 式に代入すると,

$$J = \bigcap_{j,k} (J + \langle x_1 - a_{1j}, x_2 - a_{2k} \rangle)$$

を得る. すべての  $i = 1, 2, \dots, n$  についてこれを行うと

$$J = \bigcap_{j_1, \dots, j_n} (J + \langle x_1 - a_{1j_1}, \dots, x_n - a_{nj_n} \rangle)$$

を得る.

$\langle x_1 - a_{1j_1}, \dots, x_n - a_{nj_n} \rangle$  は極大イデアルであるから,

イデアル  $J + \langle x_1 - a_{1j_1}, \dots, x_n - a_{nj_n} \rangle$  は  $\langle x_1 - a_{1j_1}, \dots, x_n - a_{nj_n} \rangle$  であるか,

あるいは  $k[x_1, \dots, x_n]$  全体のどちらかである.

すると  $J$  は有限個の極大イデアルの共通部分である.

極大イデアルは**根基イデアル**なので, **根基イデアル**の共通部分はまた**根基イデアル**

であることを用いると,  $J$  は**根基イデアル**であることが示された.

次に  $J = \sqrt{I}$  を示す .

各  $i$  について  $p_i \in I$  より ,  $p_i$  の被約化  $P_{i,\text{red}}$  は  $V = \mathbb{V}(I)$  の全ての点で 0 になる .

よって Hilbert 零点定理の強形から  $p_{i,\text{red}} \in \sqrt{I}$  である .

$J = I + \langle p_{i,\text{red}}, \dots, p_{n,\text{red}} \rangle$  だから包含関係  $J \subset \sqrt{I}$  を得る .

包含関係  $I \subset J$  と合わせて

$$I \subset J \subset \sqrt{I}$$

が成り立つ .

この式の根基をとると  $\sqrt{I} \subset \sqrt{J} \subset \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$  である .

よって  $\sqrt{J} = \sqrt{I}$  であるが ,  $J$  は**根基イデアル**であるから  $\sqrt{J} = J$  である .

従って  $J = \sqrt{I}$  .

□



## 定理 2.12

---

任意のグラフ  $F$  の3彩色イデアル  $I$  は**根基イデアル**である。

証明 各  $i$  について  $x_i^3 - 1 \in I \cap \mathbb{C}[x_i] = \langle p_i \rangle$  だから,  $x_i^3 - 1$  は  $p_i$  の倍元である。

$x_i^3 - 1 = (x_i - 1)(x_i - \omega)(x_i - \omega^2)$  ( $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ) と因数分解されるので,  $x_i^3 - 1 = 0$  は重根をもたない。

$p_i$  は  $x_i^3 - 1$  を割り切っているので  $p_i = 0$  も重根をもたない。

よって  $p_i = p_{i,\text{red}}$  である。

$I \subset \sqrt{I} = I + \langle p_{1,\text{red}}, \dots, p_{n,\text{red}} \rangle \subset I$  となるので, はさみうちより  $\sqrt{I} = I$ .

したがって  $I$  は**根基イデアル**である。 □

## 系 2.13

---

グラフ  $F$  の**3彩色イデアル**を  $I$  とする。  $F$  が3彩色可能な場合は, **塗り方の総数**  $\#\mathbb{V}(I)$  は次の式で計算できる。

$$\#\mathbb{V}(I) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/I$$

### 3 3彩色プログラム

---

数式処理システム magma 上で動く3彩色問題を解くプログラム **color3** を開発した。  
このプログラムは、グラフを入力すると、**3彩色可能 (Yes)** か **不可能か (No)** を出力し、  
さらに、3彩色可能な場合は、(1) イデアルの簡約グレブナ基底、(2) 塗り方の総数、  
(3) すべての塗り方の集合 の3つを出力する。

全ての塗り方の集合は、例1.7のように、簡約グレブナ基底の与える方程式に、小さい変数の値から順番に決めていく**後退代入**を実際に行って求めている。

# プログラム Inoue

---

```
K<w>:=CyclotomicField(3);

forward Backsub,Dainyuu;

color3:=function(n,F)
P<[X]>:=PolynomialRing(K,n);

L:=[X[i]^3-1:i in [1..n]];
M:=[X[F[i][1]]^2+X[F[i][1]]*X[F[i][2]]+X[F[i][2]]^2:i in [1..#F]];
N:=L cat M;

I:=ideal<P|N>;
G:=GroebnerBasis(N);

if G eq [1] then

return"No";

else

print"Yes";
d:=Dimension(P/I);
```

```
print "グレブナ基底= ", G;  
print "剰余環の次元=", d;
```

```
////////////////////////////////////  
////////////////////////////////////
```

```
forward Dainyuu;
```

```
Dainyuu := function(G,Y,t)
```

```
S := [1,w,w^2];
```

```
G1 := G;
```

```
s := t;
```

```
W:=[];
```

```
Z:= [X[n-i]:i in [0..n-1]];
```

```
for t in [s+1..#Z] do
```

```
///// find an element in G1 such that only a11 is contained etc.
```

```
G1:= [m: m in G1 | m ne 0];
```

```

A := [m : m in G1 | Degree(m,Z[t]) gt 0];
for i in [t+1..#Z] do
A := [m: m in A | Degree(m,Z[i]) eq 0];
end for;

check := 0;
///// seek for a solution
for i in [1..3] do
A1 := [Evaluate(m,Z[t],S[i]) : m in A];
H := [m :m in A1 | m ne 0];
if #H eq 0 then
if check eq 0 then ///// branch check
Y[t] := i;
check := 1;
else
G2 := [Evaluate(m,Z[t],S[Y[t]]) : m in G1];
G3 := [m : m in G2 | m ne 0];
Z2 := Dainyuu(G2,Y,t);

W := W cat Z2;

Y[t] := i;
end if;

```



```
Y := [m*0 : m in [1..n]]; // a sequence in which a solution is put
```

```
W := Dainyuu(G,Y,t);  
print "解の個数=", #W;  
return Sort(W);  
end function;
```

```
////////////////////////////////////  
////////////////////////////////////
```

```
return Backsub(G);
```

```
end if;
```

```
end function;
```

このプログラムの実行例を見てみよう。

## 例 3.1

---

例 1.7 のグラフ  $F_1$  を入力してみる．出力は，下記の通りである．

```
> color3(8,F1);
```

```
Yes
```

```
グレブナ基底=  [
```

```
  X[1] - X[7],
```

```
  X[2] + X[7] + X[8],
```

```
  X[3] - X[7],
```

```
  X[4] - X[8],
```

```
  X[5] + X[7] + X[8],
```

```
  X[6] - X[8],
```

```
  X[7]^2 + X[7]*X[8] + X[8]^2,
```

```
  X[8]^3 - 1
```

```
]
```

```
剰余環の次元= 6
```

```
解の個数= 6
```

```
[
```

```
  [ 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 3 ],
```

```
  [ 1, 3, 1, 2, 3, 2, 1, 2 ],
```

```
  [ 2, 1, 2, 3, 1, 3, 2, 3 ],
```

```
  [ 2, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 1 ],
```



```
[ 3, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 2 ],  
[ 3, 2, 3, 1, 2, 1, 3, 1 ]  
]
```

この出力より  $F_1$  は**3彩色可能**で、剰余環の次元は**6**、**塗り方の個数も6通り**となる。

3色の入れかえを考慮すると、

このグラフの本質的に異なる塗り方は  $6/(3!) = 1$  **通り**しかない。

## 例 3.2

---

例 1.9 のグラフ  $F_3$  を入力してみる．出力は，下記の通りである．

```
> color3(8,F3);
```

```
No
```

```
[
```

```
  1
```

```
]
```

この出力より． $F_3$  は**3彩色不可能**である．簡約グレブナ基底が  $\{1\}$  となるからである．

## 4 関東甲信越・E Uの塗り分け

### 関東甲信越

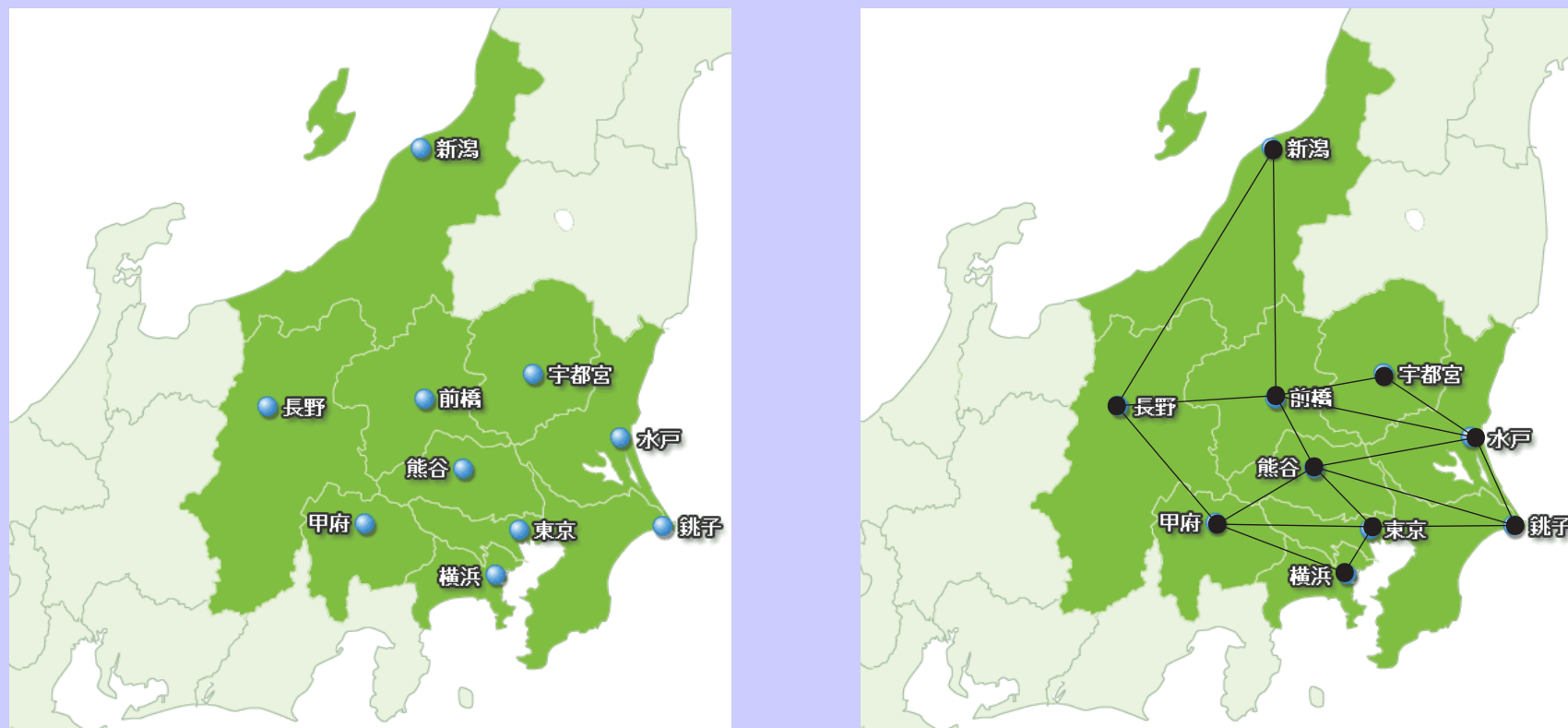


図9 関東甲信越の地図

1. 新潟
2. 長野
3. 山梨
4. 群馬
5. 埼玉
6. 東京
7. 神奈川
8. 栃木
9. 茨城
10. 千葉

## 関東甲信越の地図の彩色の結果

---

関東甲信越の10県の地図は3彩色不可能であるが、4彩色可能である。

4彩色の塗り方は576通りであるが、

4色の入れかえを考慮すると、本質的には $576 \div 4! = 24$ 通りの塗り方がある。

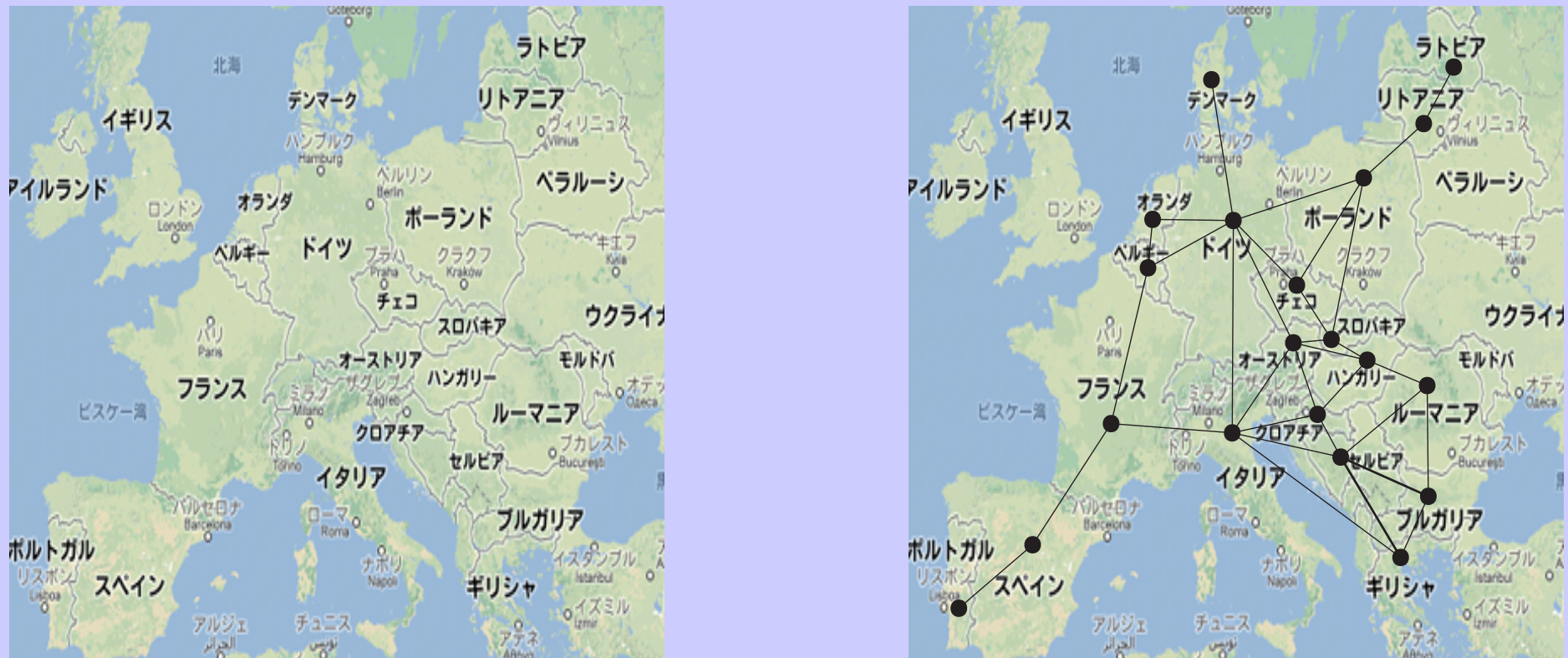


図10 EUの地図

1. オランダ
2. ベルギー
3. フランス
4. スペイン
5. ポルトガル
6. デンマーク
7. ドイツ
8. イタリア
9. チェコ
10. オーストリア
11. クロアチア
12. セルビア
13. ギリシャ
14. ポーランド
15. スロバキア
16. ハンガリー
17. ルーマニア
18. ブルガリア
19. ラトビア
20. リトアニア

## EUの地図の彩色の結果

---

ヨーロッパの20カ国の地図は**3彩色可能**である。

3彩色の塗り方は**1920通り**であるが、

3色の入れかえを考慮すると、本質的には **$1920 \div 3! = 320$ 通り**の塗り方がある。

## 5 参考文献

---

- [1] W.W. Adams, P. Loustau, **An Introduction to Gröbner Bases**, AMS, 1994.
- [2] D. Bayer, **The Division Algorithm and the Hilbert Scheme**, Ph.D. Thesis, Harvard University, MA, 1982.
- [3] D. コックス, J. リトル, D. オシー, **グレブナ基底と代数多様体入門**, シュプリンガー・ジャパン, 2000.