

代数学 I 演習

1. 次の演算表をもつ演算「 \circ 」について、以下の計算を行え。

\circ	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

- (1) $(a \circ b) \circ c$
- (2) $(b \circ a) \circ c$
- (3) $(a \circ a) \circ a$

2. 次の演算表をもつ演算「 \circ 」について、以下の計算を行え。

\circ	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	a	c	b	d
c	b	a	d	c
d	d	b	c	a

- (1) $(a \circ b) \circ c$
- (2) $a \circ (b \circ c)$
- (3) $((d \circ c) \circ b) \circ a$
- (4) $d \circ ((c \circ b) \circ a)$

3. 次の演算表をもつ演算「 \circ 」について、単位元とそれぞれの元の逆元を求めよ。

(1)

\circ	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

(2)

○	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>
<i>d</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>

(3)

○	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>
<i>p</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>q</i>
<i>q</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>
<i>r</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>
<i>s</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>
<i>t</i>	<i>q</i>	<i>r</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>p</i>

4. 次の演算表をもつ演算「○」について、単位元とそれぞれの元の逆元を求めよ。

○	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	6	1	5	4	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	4	2	3	6	1
6	6	3	4	2	1	5

5. 整数の集合 Z に次の演算「 \circ 」を導入する： $a \circ b = a + b - 1$

- (1) この演算の単位元を求めよ。
- (2) この演算に関する a の逆元 a^{-1} を求めよ。

6. 0 でない実数の集合 R^* に次の演算「 \circ 」を導入する： $a \circ b = a \times b \div 2$

- (1) この演算の単位元を求めよ。
- (2) この演算に関する a の逆元 a^{-1} を求めよ。

7.次の群の演算表の空欄を埋めよ。その根拠も述べること。

(1)

\circ	a	b	c
a			
b		a	
c			

(2)

\circ	a	b	c
a			
b		c	
c			

(3)

\circ	a	b	c
a			
b			
c	a		

(4)

\circ	a	b	c
a		b	
b			
c			

(5)

\circ	a	b	c	d
a		c		
b				
c			d	
d				

(6)

\circ	a	b	c	d
a				b
b		a		
c				
d				

(7)

\circ	a	b	c	d
a				
b		c		
c			d	
d				

(8)

\circ	a	b	c	d
a	d			
b		a		
c				
d				

(9)

\circ	a	b	c	d
a				
b		d		a
c				
d				

(10)

\circ	a	b	c	d
a				
b		d		
c			b	
d				

8. 群 G において、次の等式や命題が成り立つ事を証明せよ。

(1) $e^{-1} = e$

(2) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

(3) $(a^{-1})^{-1} = a$

(4) $a \circ a = a \Rightarrow a = e$

9. 次の群の演算表に対して、それぞれの元の位数を求めよ。

(1)

\circ	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

(2)

\circ	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	c	d	b	a

(3)

\circ	p	q	r	s	t
p	r	s	q	t	p
q	s	p	t	r	q
r	q	t	s	p	r
s	t	r	q	p	s
t	p	q	r	s	t

(4)

○	p	q	r	s	t	u
p	q	p	t	u	r	s
q	p	q	r	s	t	u
r	u	r	q	t	s	p
s	t	s	u	q	p	r
t	s	t	p	r	u	q
u	r	u	s	p	q	t

(5)

○	e	p	q	r	s	t	u	v
e	e	p	q	r	s	t	u	v
p	p	q	r	e	v	s	t	u
q	q	r	e	p	u	v	s	t
r	r	e	p	q	t	u	v	s
s	s	t	u	v	e	p	q	r
t	t	u	v	s	r	e	p	q
u	u	v	s	t	q	r	e	p
v	v	s	t	u	p	q	r	e

10. 群 $Z_6 \times Z_{12}$ において、次の元の位数を求めよ。

(1) (3, 8)

(2) (4, 10)

11. 群 $Z_8 \times Z_{12}$ において、次の元の位数を求めよ。

(1) (6, 6)

(2) (4, 8)

12. 群 $Z_4 \times Z_6$ において、次の元の位数を求めよ。

(1) (2, 2)

(2) (2, 4)

(3) (1, 3)

(4) (3, 5)

13. 群 $Z_9 \times Z_{12}$ において、次の元の位数を求めよ。

(1) (3, 2)

(2) (6, 8)

(3) (6, 10)

(4) (1, 1)

14. 群 G は次の演算表をもつものとする：

\circ	e	t_1	t_2	t_3	c_1	c_2
e	e	t_1	t_2	t_3	c_1	c_2
t_1	t_1	e	c_1	c_2	t_2	t_3
t_2	t_2	c_2	e	c_1	t_3	t_1
t_3	t_3	c_1	c_2	e	t_1	t_2
c_1	c_1	t_3	t_1	t_2	c_2	e
c_2	c_2	t_2	t_3	t_1	e	c_1

次の a, H 、に対して、左剰余類 $a \circ H$ 、右剰余類 $H \circ a$ を求めよ。

(1) $a = c_1, H = \{e, t_1\}$

(2) $a = c_2, H = \{e, t_3\}$

(3) $a = t_2, H = \{e, c_1, c_2\}$

15. 群 G は次の演算表をもつものとする：

\circ	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	e	s	t	q	r
q	q	t	e	s	r	p
r	r	s	t	e	p	q
s	s	r	p	q	t	e
t	t	q	r	p	e	s

次の a, H 、に対して、左剰余類 $a \circ H$ 、右剰余類 $H \circ a$ を求めよ。

(1) $a = q, H = \{e, p\}$

(2) $a = p, H = \{e, s, t\}$

16. 群 G は次の演算表をもつものとする：

\circ	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	6	1	5	4	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	4	2	3	6	1
6	6	3	4	2	1	5

次の a, H 、に対して、左剰余類 $a \circ H$ 、右剰余類 $H \circ a$ を求めよ。

(1) $a = 5, H = \{1, 3\}$

(2) $a = 4, H = \{1, 5, 6\}$

17. 群 G は次の演算表をもつものとする：

\circ	e	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
e	e	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	s_4
r_1	r_1	r_2	r_3	e	s_4	s_1	s_2	s_3
r_2	r_2	r_3	e	r_1	s_3	s_4	s_1	s_2
r_3	r_3	e	r_1	r_2	s_2	s_3	s_4	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	s_4	e	r_1	r_2	r_3
s_2	s_2	s_3	s_4	s_1	r_3	e	r_1	r_2
s_3	s_3	s_4	s_1	s_2	r_2	r_3	e	r_1
s_4	s_4	s_1	s_2	s_3	r_1	r_2	r_3	e

次の a, H 、に対して、左剰余類 $a \circ H$ 、右剰余類 $H \circ a$ を求めよ。

(1) $a = r_3, H = \{e, s_2\}$

(2) $a = s_1, H = \{e, r_1, r_2, r_3\}$

18. 群 Z_6 において次の元が生成する巡回部分群、およびその元の位数を求めよ。

(1)1 (2)2 (3)3 (4)4 (5)5

19. 次の演算表をもつ群において各元が生成する巡回部分群を求めよ。

(1)

\circ	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

(2)

\circ	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	c	d	a	b

(3)

\circ	p	q	r	s	t	u
p	q	p	t	u	r	s
q	p	q	r	s	t	u
r	u	r	q	t	s	p
s	t	s	u	q	p	r
t	s	t	p	r	u	q
u	r	u	s	p	q	t

20. 次の写像 f が準同型写像であることを証明せよ.

(1) $f(x) = 2x$ で定義される \mathbf{Z} (演算は+) から \mathbf{Z} への写像.

(2) $f(x) = 3x$ で定義される \mathbf{Z} (演算は+) から \mathbf{Z} への写像.

(3) $f(x) = 2^x$ で定義される \mathbf{R} (演算は+) から \mathbf{R}^* (演算は \times) への写像.

(4) $f(x) = \log_2 x$ で定義される \mathbf{R}^* (演算は \times) から \mathbf{R} (演算は+) への写像.

(5) $f(x) = \cos x + i \sin x$ で定義される \mathbf{R} (演算は+) から \mathbf{C}^* (演算は \times) への写像.

(6) 次の式で定義される \mathbf{C}^* (演算は \times) から $GL(2, \mathbf{R})$ (2次正則行列の全体の群, 演算は行列のかけ算) への写像. ただし a, b は実数とする.

$$f(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(7) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ で定義される \mathbf{R}^* (演算は \times) から $\{1, -1\}$ (演算は \times) への写像. ただし $\operatorname{sgn}(x)$ は $x > 0$ のとき 1 , $x < 0$ のとき -1 と定義される関数である.

21. 群 G_1 (演算は \circ_1 , 単位元は e_1) から群 G_2 (演算は \circ_2 , 単位元は e_2) への写像 $f: G_1 \rightarrow G_2$ が準同型写像であるとき, 以下が成り立つことを証明せよ. (ただし f が準同型写像であるというのは, $f(a \circ_1 b) = f(a) \circ_2 f(b)$ が G のすべての元 a, b に対して成り立つことである.)

(1) $f(e_1) = e_2$

(2) G_1 の任意の元 a に対して, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.