17 対称行列の直交行列による対角化

目　標

対称行列 A が与えられたとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような直交行列 P の求め方．

▶ 対称行列の直交行列による対角化

n 次対称行列 A が与えられたとき，次のようにして A を対角化する直交行列を求めることができる．

1） A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ および対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ を求める．

2） $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ にグラム・シュミットの直交化法を適用したものを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ とする．

3） $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおくと P は直交行列であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．

例題 17-1　対称行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列 P を求めよ．

［解］　まず固有値を求めると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda - 3)(\lambda + 3) - (-4)^2 \\
&= \lambda^2 - 25 \\
&= (\lambda - 5)(\lambda + 5) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

より，$\lambda = \pm 5$ である．次にそれぞれの固有値に関する固有ベクトルを求める．

(i) $\lambda = 5$ のとき：計算で出てきた行列 $\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$ に $\lambda = 5$ を代入してできる連立方程式

$$
\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を解く．基本変形を行って

$$
\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{行} \times (1/2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{1\text{行} \times 4 + 2\text{行}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

したがって，一般解は $y = \alpha$ とおくことによって

$$
\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases}
$$

で与えられる．よって固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0)
$$

である．

(ii) $\lambda = -5$ のとき：計算で出てきた行列 $\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{pmatrix}$ に $\lambda = -5$ を代入してできる連立方程式

$$
\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

を解く．基本変形を行って

$$\left(\begin{array}{cc|c} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{行}\times(-1/8)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\text{行}\times 4+2\text{行}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

したがって，一般解は $y=\beta$ とおくことによって

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\beta \\ y = \beta \end{cases}$$

で与えられ，よって固有ベクトルは，$\frac{1}{2}\beta$ をあらためて β とおくことにより (*) (あとの注意 1 を参照)，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\beta \neq 0)$$

である．

次に，いま求めた 2 つの固有ベクトルを

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおいて，グラム・シュミットの直交化法を適用すればよいのだが，すでにこの 2 つのベクトルは直交しているから (**) (あとの注意 2 を参照)，単にそれぞれの長さで割ればよい：

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

したがって，求める直交行列はこれらを並べて，

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

で与えられ，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となる．

注意 1 (*) のところでは，「$-\frac{1}{2}\beta$ をあらためて β」とおいてももちろんよい．そのときは固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\beta \neq 0)$$

と表され，それにともなって

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

となるが，結果の対角化は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となって，答えは同じである．

注意 2 (**) のところは，第 16 章で述べた

「対称行列の異なる固有値に関する固有ベクトルは互いに直交する」

という一般的な事実が背景にある．つまり，この例題のように，2 次行列の 2 つの固有値が $\lambda = \pm 5$ というように異なるので，対応する固有ベクトルが直交することが，はじめから保証されているのである．

例題 17-2 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列 P を求めよ．

[解] まず固有値を求めると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-2)^2+1+1-\lambda-(\lambda-2)-(\lambda-2) \qquad (\Leftarrow \text{たすきがけで計算した})$$
$$= \lambda^3-4\lambda^2+\lambda+6$$
$$= (\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda+6) \qquad \left(\begin{array}{l}\Leftarrow \lambda=-1 \text{ とおくと } 0 \text{ になるから，因数定理} \\ \text{によって } \lambda+1 \text{ を因数にもつ}\end{array}\right)$$
$$= (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$
$$= 0$$

より，$\lambda=-1,2,3$ となる．次に，それぞれの固有値に関する固有ベクトルを求める．

(i) $\lambda=-1$ のとき：計算ででてきた行列 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$ に $\lambda=-1$ を代入してできる連立方程式

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く．基本変形を行って

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{行}\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1\text{行}\times 1+3\text{行}]{1\text{行}\times(-1)+2\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\times(-1/2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2\text{行}\times 2+3\text{行}]{2\text{行}\times 1+1\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

したがって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

である.

(ii) $\lambda = 2$ のとき：計算ででてきた行列 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$ に $\lambda = 2$ を代入してできる連立方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く. 基本変形を行って

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れかえ}]{\text{1 行と 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{1 行} \times 1 + \text{3 行}]{\text{1 行} \times (-2) + \text{2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 行} \times 1 + \text{3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \neq 0)$$

である.

(iii) $\lambda = 3$ のとき：計算ででてきた行列 $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix}$ に $\lambda = 3$ を代入してできる連立方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く．基本変形を行って

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)
\xrightarrow[\text{入れかえ}]{1\text{ 行と }2\text{ 行を}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[1\text{ 行}\times 1+3\text{ 行}]{1\text{ 行}\times(-3)+2\text{ 行}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{2\text{ 行}\times(-1/2)}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{2\text{ 行}\times(-1)+1\text{ 行}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).
$$

したがって固有ベクトルは

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\gamma \neq 0)
$$

である．

次に，上で求めた 3 つの固有ベクトルを

$$
\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

とおいて，グラム・シュミットの直交化法を適用すればよいのだが，すでにこの 3 つのベクトルは直交しているから (p.176 の注意 2 を参照)，単にそれぞれの長さで割ればよい：

$$
\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_3\|}\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

したがって，求める直交行列はこれらを並べて

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

で与えられ，このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．

例題 17-3 対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ を対角化する直交行列 P を求めよ．

[解] まず固有値を求めると

$$\det(\lambda E - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^3 - 1 - 1 - (\lambda+1) - (\lambda+1) - (\lambda+1) \quad \left(\begin{array}{c}\Leftarrow \text{たすきがけで} \\ \text{計算した}\end{array}\right)$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

$$= (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4) \quad \left(\begin{array}{c}\Leftarrow \lambda = 1 \text{とおくと} 0 \text{になるから，因数} \\ \text{定理によって} \lambda - 1 \text{を因数にもつ}\end{array}\right)$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

$$= 0$$

より，$\lambda = 1, -2$ (重解) となる．次にそれぞれの固有値に関する固有ベクトルを求める．まず重解のほうから処理しよう．

(i) $\lambda = -2$ のとき：計算ででてきた行列 $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ に $\lambda = -2$ を代入してできる連立方程式

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く．基本変形を行って

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{行} \times (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1\text{行} \times (-1) + 3\text{行}]{1\text{行} \times (-1) + 2\text{行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

したがって $y=\alpha$, $z=\beta$ とおくことによって，解は

$$\begin{cases} x=\alpha+\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

と表される．よって，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \qquad (\Leftarrow \alpha \text{ を含む部分と } \beta \text{ を含む部分に分けた})$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\Leftarrow \alpha \text{ と } \beta \text{ をくくり出した})$$

となる．

(ii) $\lambda=1$ のとき：計算ででてきた行列 $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}$ に $\lambda=1$ を代入してできる連立方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解く．基本変形を行って

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{入れかえ}]{1\text{ 行と }2\text{ 行を}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1\text{ 行}\times(-1)+3\text{ 行}]{1\text{ 行}\times(-2)+2\text{ 行}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2\text{行}\times(-1/3)}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -3 & 3 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2\text{行}\times 3+3\text{行}]{2\text{行}\times(-2)+1\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

したがって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\quad(\gamma\neq 0)$$

となる.

次に，上で求めた3つの固有ベクトルを

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

とおいて，グラム・シュミットの直交化法を適用する：

1） $$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1=\frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

2.1） $$\boldsymbol{x}_2'=\boldsymbol{x}_2-(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$$

2.2) $$e_2 = \frac{1}{\|x_2'\|}x_2' = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\Leftarrow \text{分子・分母の各成分をすべて 2 倍した})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3) $x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有値 $\lambda = 1$ に関する固有ベクトルだから，他の 2 つのベクトルと直交している．したがって，その長さで割るだけでよく

$$e_3 = \frac{1}{\|x_3\|}x_3 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

以上の 3 つのベクトル e_1, e_2, e_3 を並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

が求める直交行列であり，このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．

例題 17-4 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化せよ．ただし a, b は定数であり，$b \neq 0$ とする．

［解］ まず固有値を求める：

$$\begin{aligned}\det(\lambda E - A) &= \det\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - a \end{pmatrix} \\ &= (\lambda - a)^2 - b^2 \\ &= (\lambda - a - b)(\lambda - a + b) \\ &= 0\end{aligned}$$

（⇐ 因数分解の公式 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ において，$x = \lambda - a$, $y = b$ とおいた）

より，固有値は $\lambda = a + b,\ a - b$.

（i） $\lambda = a + b$ のとき：行列 $\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - a \end{pmatrix}$ に $\lambda = a + b$ を代入して得られる連立方程式

$$\begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよいから

$$\left(\begin{array}{cc|c} b & -b & 0 \\ -b & b & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行} \times (1/b)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -b & b & 0 \end{array}\right)$$

（⇐「$b \neq 0$」という条件がきいていることに注意）

$$\xrightarrow{1\text{ 行} \times b + 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha \neq 0)$$

である．

（ii） $\lambda = a - b$ のとき：行列 $\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ -b & \lambda - a \end{pmatrix}$ に $\lambda = a - b$ を代入して得られる連立方程式

$$\begin{pmatrix} -b & -b \\ -b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばよいから

$$\left(\begin{array}{cc|c} -b & -b & 0 \\ -b & -b & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1\text{ 行}\times(-1/b)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -b & -b & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l}\Leftarrow\text{「}b \neq 0\text{」だか}\\ \text{ら } b \text{ で割っ}\\ \text{てよい}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\text{ 行}\times b + 2\text{ 行}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

より，固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \neq 0)$$

である．

そこで，(i)，(ii) で求めた固有ベクトルを

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおいて，あとはグラム・シュミットの直交化法を適用すればよいが，ここで固有値の $a+b$ と $a-b$ は等しくないことに注意しよう．($\Leftarrow b \neq 0$ がここでもきいている.)　したがって，2 つの固有ベクトルは互いに直交しており，それぞれのベクトルを長さで割ればよい:

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}_2\|}\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

これらを並べた行列

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

が求める直交行列であり，このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

となる．

練習問題 17

1. 次の対称行列を直交行列によって対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. 対称行列 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化せよ．

3. 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix}$ を直交行列によって対角化する，という問題を考える．

(1) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルであることを示し，その固有値を求めよ．

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルであることを示し，その固有値を求めよ．

(3) (1) と (2) を参考にしてあと 2 つ 1 次独立な固有ベクトルを見いだせ．

(4) 以上を利用して A を直交行列によって対角化せよ．