解析学 I 演習 No. 1

［１］次を日本語で表現せよ.（不等式，等式はそのままでよい.）

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq 0.$
(ii) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 = 0.$
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x - y = 3.$
(iv) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x > -(y-1)^2.$
(v) $\alpha \in \mathbb{R}, \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ とする.
$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \alpha + \varepsilon > x.$

［２］［１］の各問について，否定を記号を使って書き，また日本語で表現せよ.
［３］ 実数の公理の中で，(1.4) における $\forall x \in \mathbb{R}, \exists_1 (-x) : x + (-x) = 0.$ は
(1.4)' $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (-x) : x + (-x) = 0$
と書いてもよいこと，すなわち，(1.4)' から (1.4) がしたがうことを証明せよ.
（一意的に存在することを $\exists_1$ と書く）((1.8) についても同様である）.

解析学 I 演習 No. １ 解答例

［１］(i) 任意の（すべての）実数 x に対して，$-x^2 \leq 0$ が成立する．
(ii) 適当な実数 x が存在して，$x^2-5=0$ となる．
(iii) 任意の実数 x に対して，実数 y が存在して，$x-y=3$ を満たす．
(iv) 適当な実数 x をとれば，任意の実数 y にたいして，$x > -(y-1)^2$ となる．
(v) 任意の正数 ε に対して，A の要素 x が存在して，$\alpha+\varepsilon > x$ を満たす．

［２］(i) $\exists x \in \mathbb{R} : -x^2 > 0.$
適当な（ある）実数 x が存在して，$-x^2 > 0$ を満たす．
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2-5 \neq 0.$
任意の（すべての）実数 x に対して，$x^2-5 \neq 0$ となる．
(iii) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x-y \neq 3.$
適当な実数 x が存在し，任意の実数 y に対して，$x-y \neq 3$ となる．
(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \leq -(y-1)^2.$
すべての実数 x に対して，実数 y が存在して，$x \leq -(y-1)^2$ を満たす．
(v) $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \alpha+\varepsilon \leq x.$
適当な正数 ε が存在して，すべての A の要素 x に対して，$\alpha+\varepsilon \leq x$ となる．

［３］ (1.4) を仮定して，(1.4)’ は明らかである．逆に，(1.4)’ を仮定する．$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して，$x+(-x)=0$ となる $(-x) \in \mathbb{R}$ は存在する．他に，$x+y=0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ となる $y \in \mathbb{R}$ が存在したとすると，

$$\begin{aligned} y &= y+0 \\ &= y+\{x+(-x)\} \\ &= (y+x)+(-x) \\ &= (x+y)+(-x) \\ &= 0+(-x) \\ &= -x. \end{aligned}$$

したがって，$y=-x$ となり，このことは $x \in \mathbb{R}$ に対して $x+(-x)=0$ となる $-x$ は一意的に存在することを意味する．

解析学 I 演習 No. 2

［1］ B を下に有界な空でない集合として，$\beta = \inf B$ であることの必要十分条件は

$$\begin{cases} x \geq \beta, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B : x < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

であることを示せ．

［2］ $A = \{x \in \mathbb{R}\ ; -1 < x \leq 1\}$ とする．
$\sup A,\ \inf A,\ \max A,\ \min A$ を求めよ．

［3］ $A = \{x \in \mathbb{R}\ ; |x - a| < 1\}$ とする．
$\sup A,\ \inf A$ を求めよ．

［4］ $B = \{x \in \mathbb{R}\ ; |x| < |a| + 1\}$ とする．$\sup B,\ \inf B$ を求めよ．

［5］ $A \neq \emptyset$ とする．$\max A$ が存在するとき， $\sup A = \max A$ であることを示せ．

［6］ $A \neq \emptyset$ とする．$\min A$ が存在するための必要十分条件は，A が下に有界であって，かつ $\inf A \in A$ であることを示せ．

［7］ A, B を区間 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$ に含まれる空でない部分集合とし，条件 $\forall x \in A, \forall y \in B$ に対し $x \leq y$ が満たされていると仮定する．次を証明せよ．$a \leq \inf A \leq \sup A \leq \inf B \leq \sup B \leq b$

［8］ A を区間 $(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ に含まれる空でない部分集合とし，$B = \left\{\dfrac{1}{x}\ ; x \in A\right\}$ とおく．

$$\sup B = \frac{1}{\inf A}, \tag{1}$$

$$\inf B = \frac{1}{\sup A} \tag{2}$$

を証明せよ．ただし，$1/0 = \infty,\ 1/\infty = 0$ と約束する．

［9］$A,\ B$ を $\mathbb{R}$ に含まれる空でない有界な部分集合とし，$C = \{x+y; x \in A,\ y \in B\}$ とおく．次を証明せよ．

(i) $\sup C = \sup A + \sup B$.

(ii) $\inf C = \inf A + \inf B$.

解析学 I 演習 No. 2 解答例

［1］ $\beta = \inf B$ とする．β は B の下界であるから，$\forall x \in B, x \geq \beta$ となる．$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in B : x < \beta + \varepsilon$ を否定すると，$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in B, x \geq \beta + \varepsilon$ となる．これは，$\beta + \varepsilon$ が B の下界であることを意味する．しかしこのことは，β が B の最大下界であることに矛盾する．逆に，問題の条件が成り立つとする．一行目は β が B の下界であることを意味する．二行目は β が B の下界のうちで最大のものであることを意味する．

［2］ $\sup A = \max A = 1, \inf A = -1, \min A$ は存在しない．

［3］ $\sup A = a + 1, \inf A = a - 1.$

［4］ $\sup A = |a| + 1, \inf A = -|a| - 1.$

［5］ $\max A = \alpha$ とおく．任意の $x \in A$ に対して，$x \leq \alpha$ となる．また，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\alpha - \varepsilon < \alpha \in A$ となる．このことは $\alpha = \sup A$ を意味する．

［6］ $\beta = \min A$ が存在したとする．このとき,［5］と同様な議論により $\min A = \inf A$ となる． $\forall x \in A, x \geq \beta$, かつ $\inf A = \beta \in A.$

逆に，A が下に有界であり，$\inf A \in A$ となったとする．$\beta = \inf A$ とおく．β は A の下界であり，$\beta \in A$ となるので，$\beta = \min A$ である．

［7］ $a \leq \inf A \leq \sup A, \inf B \leq \sup B \leq b$ は明らかであるので，$\sup A \leq \inf B$ を示せばよい． 任意の $x \in A, y \in B$ に対して，$x \leq y$ となるので，y は A の上界であるから，$\sup A \leq y$ となる．また，$\sup A$ は B の下界となり $\sup A \leq \inf B$ となる．

［8］ $\alpha = \inf A, \beta = \sup B$ とおく．このとき，$0 \leq \alpha < \infty$ となる．

$0 < \alpha$ のとき，任意の $x \in A$ に対して，

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1. \tag{1}$$

これより $\alpha \cdot \frac{1}{x} \leq 1$. すなわち，$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha}$. したがって，$0 < \beta \leq \frac{1}{\alpha}$. 故に，$\alpha\beta \leq 1$. 再び (1) から $x \sup B \geq 1$. これより，$x \geq 1/\beta$. したがって，$\alpha \geq 1/\beta$. あわせて，$\alpha\beta = 1$ となる．

$\alpha = 0$ のとき，任意の $M > 0$ に対して，$x \in A$ が存在して，$x < 1/M$ となる．したがって，$1/x > M$ 故に，$\sup B > M$. これは $\sup B = +\infty$ を意味する．

$A = \left\{ \frac{1}{y}; y \in B \right\}$ と書ける．上と同様な議論より，$\sup A = 1/\inf B$ となる．

［ 9 ］ $\sup A = \alpha, \sup B = \beta,$ とおく．任意の $x \in A, y \in B$ に対して，$x \leq \alpha, y \leq \beta$ となるので，任意の $x + y \in C$ $(x \in A, y \in B)$ に対して，$x + y \leq \alpha + \beta$ である．また，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\exists x_0 \in A : \alpha - \varepsilon/2 < x_0, \quad \exists y_0 \in B : \beta - \varepsilon/2 < y_0$ となるので，$x_0 + y_0 \in C$ が存在して，$\alpha + \beta - \varepsilon < x_0 + y_0$ となる．これは $\alpha + \beta = \sup C$ を意味する．

解析学 I 演習 No. ３

［１］数列 $\{a_n\}$ が a に収束していることの定義は

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

であった．以下のそれぞれは (1) に同値であることを示せ．
(i) $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon.$
(ii) $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$
(iii) $k > 0$ とする．$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < k\varepsilon.$

［２］ 次を確かめよ．
(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+n} = 1.$
(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n+2} = \infty.$
(iv) $\lim_{n\to\infty}(-n^2 + (-1)^n n) = -\infty$.
(v)

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \end{cases}$$

［３］ 次の極限値を求めよ．
(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n} - n}.$
(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}.$
(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}.$
(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^n+1} \qquad (a \neq -1)$.
(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)^n - a^n}{n} \qquad (a > 0).$
(vi) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}.$

［4］ (i) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ となることを証明せよ．
(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-2}) = 0$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$ となることを証明せよ．

［5］ A を空でない上に有界な集合として，$\alpha = \sup A$ とおく．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となる数列 $\{a_n\} \subset A$ が存在することを証明せよ．
［6］ A を空でない下に有界な集合として，$\beta = \inf A$ とおく．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ となる数列 $\{a_n\} \subset A$ が存在することを証明せよ．

解析学 I 演習 No. ３ 解答例

［１］ (1) から (i) は明らか．
(i) $\Longrightarrow$ (ii)
$\forall \varepsilon > 0$ とする．(i) で $\varepsilon/2$ を与えられたものとすると， $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon/2$. したがって，$n > N$ のとき，$|a_n - a| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii)
$k > 0$ として，$\forall \varepsilon > 0$ に対して，(ii) で $k\varepsilon$ を与えられたものとすると，$\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < k\varepsilon$.
(iii) $\Longrightarrow$ (1)
$\forall \varepsilon > 0$ に対して，(iii) で ε/k を与えられたものとすると，$\exists N \in \mathbb{N}; n \geq N \Longrightarrow |a_n - a| < k(\varepsilon/k) = \varepsilon$.

［２］(i)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n^2}{1+1/n} = 1.$$

(iii) $(n^2+n)/(n+2) = n - n/(n+2)$. $n/(n+2)$ は 1 に収束する．一方，n は $+\infty$ に発散するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n+2} = +\infty$.

(iv) $-n^2 + (-1)^n n) = -n^2\left(1 - (-1)^n \frac{1}{n}\right)$. $1 - (-1)^n \frac{1}{n} \to 1$ $(n \to \infty)$. したがって，$\lim_{n\to\infty}(-n^2 + (-1)^n n) = -\infty$.
(v) $|a| < 1$ のとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N = \left[\frac{\log \varepsilon}{\log |a|}\right] + 1$ とおく．このとき，$|a|^N < \varepsilon$. $n \geq N$ ならば $|a| < 1$ だから $|a^n| = |a|^n \leq |a|^N < \varepsilon$.
$a > 1$ のとき，$a = 1 + b$ とおくと，$b > 0$ となる．二項定理より，$a^n = (b+1)^n \geq 1 + nb \to \infty$.
$a = 1$ のときは明らかである．

［３］ (i)

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n} - n} = \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \sqrt{1+1/n} + 1 \to 2 \quad (n \to \infty).$$

(ii)
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)/2}{n^2}\to 1/2\quad(n\to\infty).$$
(iii)
$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n^3}=\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6}\to 1/3$$
$(n\to\infty)$.
(iv) $|a|<1$ のとき，$\frac{a^n-1}{a^n+1}\to -1\quad(n\to\infty)$.
$a=1$ のとき，明らかに $\frac{a^n-1}{a^n+1}=0$.
$|a|>1$ のとき，$\frac{a^n-1}{a^n+1}=\frac{1-1/a^n}{1+1/a^n}\to 1\quad(n\to\infty)$.
(v) $(a+1)^n-a^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots na^{n-1}$. したがって，$\frac{(a+1)^n-a^n}{n}\geq\frac{n-1}{2}a^2\to\infty\quad(n\to\infty)$.
(vi) $|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}|\leq\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$ より，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=0$.

［4］(i) $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ より $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N};n\geq N\Longrightarrow|a_n-a|<\varepsilon/2$. $n\geq N$ として，
$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N-1}+a_N+\cdots a_n}{n}-a\right|$$
$$\leq\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N-1}-a|}{n}+\frac{n-(N-1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$
いま，$N_1\geq N$ を $n\geq N_1$ のとき，
$$\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N-1}-a|}{n}<\varepsilon/2$$
をみたすようにとる．このとき，$n\geq N_1$ ならば，
$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}-a\right|<\varepsilon$$
となる．
(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$ より $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N};n\geq N\Longrightarrow|a_n-a_{n-2}|<\varepsilon/2$. $n\geq N$ として，
$$\begin{aligned}|a_n-a_{n-1}|&=|a_n-a_{n-2}-(a_{n-1}-a_{n-3})+(a_{n-2}-a_{n-4})\\&\quad-\cdots-(a_N-a_{N-2})+(a_{N-1}-a_{N-2})|\\&\leq(n-N+1)\frac{\varepsilon}{2}+|a_{N-1}-a_{N-2}|<\frac{\varepsilon}{2}n+|a_{N-1}-a_{N-2}|.\end{aligned}$$

いま，$N_1 \geq N$ を
$$\frac{|a_{N-1} - a_{N-2}|}{N_1} < \varepsilon/2$$
となるようにとると，$n \geq N_1$ のとき，

$$\frac{|a_n - a_{n-1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_{N-1} - a_{N-2}|}{N_1} < \varepsilon.$$

［５］ $\alpha = \sup A$ だから，$\forall x \in A, x \leq \alpha$ かつ $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \alpha - \varepsilon < x.$
ここで，$\varepsilon = 1/n$ として，対応する $x_n \in A$ をとると，

$$x_n \leq \alpha, \quad \alpha - 1/n < x_n,$$

すなわち，$\alpha - 1/n < x_n \leq \alpha$ となる．はさみうちより $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha.$

［６］ $\beta = \inf A$ だから，$\forall x \in A, x \geq \alpha$ かつ $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \beta + \varepsilon > x.$
ここで，$\varepsilon = 1/n$ として，対応する $x_n \in A$ をとると，

$$x_n \geq \beta, \quad \beta + 1/n > x_n,$$

すなわち，$\beta \leq x_n < \beta + 1/n$ となる．はさみうちより $\lim_{n\to\infty} x_n = \beta.$

解析学 I 演習 No. 4

［1］数列 $\{a_n\}$ に対して，$0 < r < 1$ を満たす r と $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_0$ のとき，$a_n \neq 0$ かつ

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r$$

を満たすものとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを証明せよ．

［2］次の極限値を求めよ．

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^2}$. （不等式 $e^x > \frac{1}{6}x^3 \quad (x \geq 0)$ は使ってよい）.

(iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

(v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}, \qquad (a \in \mathbb{R})$.

(vi) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

(vii) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}, \qquad (a > 0)$.

(viii) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$.

(ix) $\lim_{n\to\infty} n^k a^n, \qquad (k \in \mathbb{N},\ |a| < 1)$.

［3］$\{a_n\}$ を収束数列とする．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ならば，$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$ であることを示せ．

［4］ $a_1 \geq 0,\ a_{n+1} = ({a_n}^2 + 1)/2,\ (n \in \mathbb{N})$ とする．$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［5］ $a_1 > 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},\ (n \in \mathbb{N})$ とする．$\{a_n\}$ が単調減少数列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

解析学 I 演習 No. 4 解答例

［1］$n \geq N_0$ のとき，$|a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-N_0}|a_{N_0}|$ であり，$0 < r < 1$ から右辺は 0 に収束するので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

［2］(i)

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-1} \to e^{-1} \quad (n \to \infty).$$

(ii)

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$
$$\to e \quad (n \to \infty).$$

(iii) $\frac{e^n}{n^2} \geq \frac{1}{6}n \to \infty$.

(iv)

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n^n} = (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-2}{n})\frac{1}{n}$$
$$\leq \frac{1}{n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(v) $\exists N \in \mathbb{N} : |a| < N$. $n \geq N$ として

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^{n-N}a^N}{n(n-1)\cdots N!} \leq \frac{|a|^N}{N!}\cdot\left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(vi) $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ とおくと，$a_n \geq 0$ である．二項展開を利用して，$n = (1+a_n)^n > \frac{n(n-1)}{2}a_n^2$. したがって，

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

故に，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
(vii) $a \geq 1$ のとき，$n > a$ ならば，$1 \leq \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ となり，前問より，右辺は 1 に収束する．したがって挟み打ちより $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. $a < 1$ のときは,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = 1.$$

(viii) 任意の $M > 0$ に対して，$N \in \mathbb{N}$ を $N > M$ となるようにとる．$n \geq N$ ならば，$n! = n(n-1)\cdots(N+1)N! \geq M^{n-N}N!$ したがって，

$$\sqrt[n]{n!} \geq M^{1-N/n}\sqrt[n]{N!} \to M \quad (n \to \infty).$$

したがって，$\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \Longrightarrow \sqrt[n]{n!} > M/2$. 故に，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$.

(ix) ［1］を使う．

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^k |a| \to |a| \quad (n \to \infty).$$

したがって，$\exists N \in \mathbb{N}, \exists 0 < r < 1 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r < 1$. ［1］より $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$.

［3］ $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ であるから，$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |a|$.

［4］ 帰納法から，$a_n > 0$ がわかる．

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2+1}{2} - a_n = \frac{(a_n-1)^2}{2} \geq 0.$$

であるから，数列 $\{a_n\}$ は単調増加．$0 < a_1 \leq 1$ のとき，k まで $a_k \leq 1$ を満たすとすると，$a_{k+1} = \frac{a_k^2+1}{2} \leq 1$. 故に，$a_n \leq 1$. したがって，数列 $\{a_n\}$ は上に有界であり，単調増加でもある．それ故に数列 $\{a_n\}$ は収束するので $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと $a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2}$ で $n \to \infty$ とすれば，$\alpha = \frac{\alpha^2+1}{2}$ を得る．このとき，$\alpha = 1$ である．$a_1 > 1$ のとき，

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2+1}{2} - a_n = \frac{(a_n-1)^2}{2} \geq \frac{(a_1-1)^2}{2}.$$

これより，数列 $\{a_n\}$ は上に有界ではない．したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

［5］ 帰納法から，$a_n > 0$ がわかる．

$$a_{n+1}^{-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n > a_1 + \cdots a_{n-1} = a_n^{-1}.$$

これより，$0 < a_{n+1} < a_n$. すなわち，数列 $\{a_n\}$ は下に有界で単調減少である．$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと，$\alpha \geq 0$ となる．$\alpha > 0$ のとき，等式 $a_{n+1}^{-1} = a_n^{-1} + a_n$ で $n \to \infty$ とすると，$\alpha^{-1} = \alpha^{-1} + \alpha$ となり，矛盾である．したがって，$\alpha = 0$.

解析学 I 演習 No. ５

［１］ $a_1 \geq 0,\, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1},\, (n \in \mathbb{N})$ とする．$\{a_n\}$ が Caushy 列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［２］ $\alpha > 0,\, \beta > 0,\, \alpha + \beta = 1,\, a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2},\, n \geq 3$ とする．$\{a_n\}$ が Caushy 列であることを示し $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

［３］ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $2a_{n+1} = b_n + c_n,\, 2b_{n+1} = c_n + a_n,\, 2c_{n+1} = a_n + b_n$ を満たせば，$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ はすべて，$(a_1 + b_1 + c_1)/3$ に収束することを示せ．

［４］ $A(\neq \emptyset) \in \mathbb{R},\ \alpha = \sup A$ に対し次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することを証明せよ：

$a_n \in A,\, a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$

解析学 I 演習 No. ５ 解答例

［１］帰納法より，$a_n \geq 0$ となる．

$$|a_{n+1} - a_n| \leq |\sqrt{a_n+1} - \sqrt{a_{n-1}+1}| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{\sqrt{a_n+1}+\sqrt{a_{n-1}+1}} \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|.$$

これから，$\{a_n\}$ はコーシー列である．コーシー列は収束するので，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと，$a_{n_1} = \sqrt{a_n+1}$ で $n \to \infty$ とすれば，$\alpha = \sqrt{\alpha+1}$. これを解いて，$\alpha = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. $a_n \geq 0$ より，$\alpha \geq 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty} a_n = (1+\sqrt{5})/2$.

［２］

(1) $a_n + \beta a_{n-1} = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \beta a_{n-1} = a_{n-1} + \beta a_{n-2} \cdots = a_2 + \beta a_1$.

一方，$|a_n - a_{n-1}| = \beta|a_{n-1} - a_{n-2}|$. $0 < \beta < 1$ より，$\{a_n\}$ はコーシー列であるので収束する．$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ として，(1) で $n \to \infty$ とすると，$\alpha + \beta\alpha = a_2 + \beta a_1$. $\alpha = (a_2 + \beta a_1)/(1+\beta)$.

［３］ $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = \cdots a_1 + b_1 + c_1 =: \alpha$. $2a_{n+1} = b_n + c_n = \alpha - a_n$. （これより極限値は $\alpha/3$ であろうと推測する）．

$$a_{n+1} - \frac{\alpha}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{\alpha}{3}\right) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_1 - \frac{\alpha}{3}\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha/3$. 同様に，$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha/3$.

［４］ $\alpha \in A$ のときは，$a_n = \alpha$ とおけばよい．$\alpha \notin A$ のとき，$\exists a_1 \in A : \alpha - 1 < a_1 < \alpha$. $\max\{a_1, \alpha - 1/2\} < \alpha$ より，$\exists a_2 : \max\{a_1, \alpha - 1/2\} < a_2 < \alpha$. 以下同様にして，$a_1 < a_2 < \cdots$ で $\alpha - 1/n < a_n < \alpha$ を満たす $a_n \in A$ が存在する．挟み打ちより $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

解析学 I 演習 No. 6

［1］ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ を次の方針にしたがって示せ.

(i) $x>2$ として $[x]=n$ とおくと，$n \le x < n+1$ となる．このとき，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

を示せ.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ をつかって，$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ を示せ.

［2］ 次を示せ.

(i) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

(ii) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$

［3］ 次の極限を求めよ.

(i) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}.$

(ii) $\lim_{x\to 0+0}\frac{\cos x}{x}.$

(iii) $\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}.$ 　　($\lim_{x\to 0+0}$ を $\lim_{x\downarrow 0}$, $\lim_{x\to 0-0}$ を $\lim_{x\uparrow 0}$ と書くことがある).

(iv) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x).$

(v) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x.$

［4］ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を次の手順で示せ.

(i) x と $\sin x$ は奇関数であるから，$\sin x/x$ は $x\neq 0$ で定義された偶関数．したがって，$x>0$ としてよい.

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

を図を書いて示せ.（たいていの高校の教科書に載っているはず）.

(ii) はさみうちより，$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ.

解析学 I 演習 No. 6 解答例

［1］ (i) は単純な不等式の計算.
(ii)

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

を使う.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

であるから，挟み撃ちにより，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ となる.

［2］ (i) $y=-x$ とおけば，$x\to-\infty \Longleftrightarrow y\to\infty$.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}\\ &= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) \to e \quad (y\to\infty)\end{aligned}$$

(ii) $x>0$ として，$1/x=y$ とおけば，$x\to+0 \Longleftrightarrow y\to\infty$.

$$(1+x)^{1/x} = \left(1+\frac{1}{y}\right)y \to e \quad (x\to+0)$$

から $\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x}=e.$ となる．また，$x<0$ として $1/x=y$ とおけば，$x\to-0 \Longleftrightarrow y\to-\infty$ となる．これより，

$$(1+x)^{1/x} = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \to e \quad (x\to-0)$$

あわせて $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e$ を得る.

［3］ (i) $|x\sin\frac{1}{x}| \leq |x| \to 0 \quad (x\to0)$ であるからはさみうちにより，$\lim_{x\to x} x\sin\frac{1}{x}=0$.
(ii) $\cos 0 = 1 > 0$ であるから，$\lim_{x\downarrow0}\frac{\cos x}{x}=+\infty$.

(iii) $x < 0$ のとき，$|x|/x = -1$. したがって，$\lim_{x\uparrow 0} \frac{|x|}{x} = -1$.
(iv)

$$\sqrt{x^2+x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x}+1} \to 1/2 \quad (x \to \infty).$$

(v) $x = -y$ とおくと，$x \to \infty \Longleftrightarrow y \to -\infty$.

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \left\{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right\}^{-1} \to e^{-1} \quad (x \to \infty).$$

［４］(i) x と $\sin x$ は奇関数であるから，$\sin x/x$ は $x \neq 0$ で定義された偶関数．したがって，$x > 0$ としてよい．

(1)
$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

を図を書いて示せ．(たいていの高校の教科書に載っているはず)．
(ii) (1) から，

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \to +0$ とすると，はさみうちより，$\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\sin x/x$ は偶関数であるから，$\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+0} \frac{\sin x}{x} = 1$. あわせて，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

解析学 I 演習 No. 7

［1］ $y = f(x)$ は区間 I 上で定義された連続関数，$z = g(y)$ は区間上 J で定義された連続関数で，f の値域 $R(f) := \{f(x); x \in I\}$ が $R(f) \subset J$ をみたすものとする．このとき，合成関数 $z = g(f(x))$ は I で連続であることを証明せよ．

［2］ 集合 $D \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ で稠密とは，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x_n \in D$ で $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる数列 $\{x_n\}$ がとれることをいう．有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ でこの意味で稠密であることを証明せよ．

［3］ $f(x), g(x)$ を $\mathbb{R}$ で連続な関数とする．また，D を $\mathbb{R}$ で稠密な集合とする．D 上で $f(x) = g(x)$ となれば，$f(x) \equiv g(x)$ となることを証明せよ．

［4］ $f(x)$ を $\mathbb{R}$ で連続な関数とする．任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

をみたすとき，f は $f(x) = f(1)x$ と表せることを示せ．

［5］ f を $I = [a, b]$ で定義された関数で，$f(I) \subset I$ をみたし，定数 $0 < c < 1$ が存在して，任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

を満たすものとする．このとき，f は I で連続な関数であり，$f(x) = x$ をみたす $x \in I$ がただ 1 つ存在することを示せ．

［6］ 有界閉区間 I 上の連続関数 $f(x)$ の値域 $R(f) := \{f(x); x \in I\}$ はまた有界閉区間であることを証明せよ．ただし，1 点からなる集合も閉区間と考える．

［7］ $f(x)$ は有界閉区間 I で連続な関数で $f(x) > 0$ $(x \in I)$ とする．このとき，ある正の数 c が存在して，$f(x) \geq c$ $(x \in I)$ となることを証明せよ．

［8］ 方程式 $x - \cos x = 0$ は区間 $(0, \pi/2)$ に解をもつことを証明せよ．

解析学 I 演習 No. 7 解答例

［1］ $x \in I$ とする．$\{x_n\} \subset I$ を $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ となる任意の数列とする．このとき，$y_n = f(x_n)$ とおけば，f の連続性から，$y_n \to y := f(x)$ となる．したがって，g の連続性から，$g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(y) = g(f(x))$ となる．

［2］ 各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$x - 1/n < x + 1/n$ であるから，定理 1.3.16 から，$x_n \in \mathbb{Q}$ で，$x - 1/n < x_n < x + 1/n$ となるものが存在する．このとき，はさみうちより，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となり，数列 $\{x_n\}$ は求めるものである．

［3］ $\mathbb{R}$ の任意の要素 x に対して，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となる $\{x_n\} \subset D$ が存在する．このとき，$f(x), g(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であるから，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$$

となる．

［4］ (1) 任意の自然数 n に対して，$f(n) = nf(1)$ となる．何故ならば，$n = 1$ のときは，明らか．$n = k$ のときに成立するものとして，$n = k+1$ のとき，$f(k+1) = f(k) + f(1) = kf(1) + f(1) = (k+1)f(1)$ となる．

(2) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ より，$f(0) = 0$.

(3) $f(-1) + f(1) = f(-1+1) = f(0) = 0$ より，$f(-1) = -f(1)$. (1) と同様に，$f(-n) = -nf(1)$ $n \in \mathbb{N}$.

(4) 有理数 m/n $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ に対して，$mf(1) = f(m) = f(n \cdot m/n) = nf(m/n)$ より，$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$. したがって，任意の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対して，$f(q) = qf(1)$ となる．［2］［3］ より，任意の実数 x に対して，$f(x) = xf(1)$ となる．

［5］ $c \in I$ を任意にとり，$a_1 = c$ とおく．$a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \ldots)$ とする．このとき，$a_n \in I$ かつ，

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \le c|a_n - a_{n-1}|.$$

$0 < c < 1$ であるから，数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である．コーシー列は収束するので，$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく．$a \le a_n \le b$ であるから，$\alpha \in I$ と

なる．f は $x=\alpha$ で連続だから，$a_{n+1}=f(a_n)$ において，$n\to\infty$ とすれば，$\alpha=f(\alpha)$ となる．一意性は，$f(x)=x$ をみたす点 x_1,x_2 が 2 つ合ったとすると，$|x_1-x_2|=|f(x_1)-f(x_2)|\le c|x_1-x_2|$. $0<c<1$ であるから，$x_1=x_2$ となる．

［６］ 有界閉区間 I 上の連続関数 f は，最大値，最小値をもつので，$\alpha=\min_{x\in I}f(x), \beta=\max_{x\in I}f(x)$ とおくと $f(I)\subset[\alpha,\beta]$ となる．$\alpha=\beta$ のときは，$[\alpha,\beta]=\{\alpha\}$ と解釈する．任意の $\gamma\in[\alpha,\beta]$ に対して，中間値の定理より，$f(c)=\gamma$ となる $c\in I$ が存在する．このことは，$[\alpha,\beta]\subset f(I)$ を意味する．あわせて，$f(I)=[\alpha,\beta]$ となる．

［７］ f は有界閉区間 I で連続であるから，最小値をもつ．すなわち，$\exists c\in I : f(c)=\min_{x\in I}f(x)$ となる．したがって，任意の $x\in I$ に対して，$f(x)\ge f(c)>0$.

［８］ $f(x)=x-\cos x$ は連続関数で，$f(0)=-1<0$, $f(\pi/2)=\pi/2>0$ であるから，中間値の定理により $f(c)=0$ となる c が区間 $(0,\pi/2)$ に存在する．

解析学 I 演習 No. ８

［１］ 次の等式を示せ．

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$

［２］ 次の等式を証明せよ．
(i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2 \quad (x\in[-1,1]).$
(ii) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\pi/4.$
(iii) $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}1/239=\pi/4.$

［３］ 関数 $f(x)=x^2$ は $(-1,1)$ で一様連続であることを示せ．また，$\mathbb{R}$ では一様連続ではないことを示せ．

［４］ $f(x)$ は区間 I で一様連続な関数で

$$\exists c>0:|f(x)|\geq c \quad (\forall x\in I)$$

をみたすとすれば，$1/f(x)$ も I で一様連続であることを証明せよ．

［５］ 関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であり，

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$$

をみたすものとする．このとき，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ で一様連続であることを証明せよ．

解析学 I 演習 No. ８ 解答例

［１］ (i) $\frac{\log(1+x)}{x} = \log(1+x)^{1/x} \to \log e = 1$ $(x \to 0)$.
(ii) $e^x - 1 = y$ とおくと，$x \to 0$ のとき，$y \to 0$ となる．$\frac{e^x-1}{x} = \frac{y}{\log(1+y)} = \frac{1}{\log(1+y)/y} \to 1$ $(y \to 0)$.

［２］ (i) $\sin^{-1} x = y$ とおくと，$x = \sin y$ $(-\pi/2 \le y \le \pi/2)$ となる．$x = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$ であり，$0 \le \frac{\pi}{2} - y \le \pi$ であるから，$\frac{\pi}{2} - y = \cos^{-1} x$ となる．
(ii) $\tan^{-1} 1/2 = y, \tan^{-1} 1/3 = z$ とおくと，$1/2 = \tan y, 1/3 = \tan z$, $0 < z < y < \pi/4$.

$$\tan(y+z) = \frac{\tan y + \tan z}{1 - \tan y \tan z} = 1.$$

$0 < y + z < \pi/2$ であるから，$y + z = \pi/4$.
(iii) $\tan^{-1} 1/5 = y, \tan^{-1} 1/239 = z$ とおくと，$1/5 = \tan y, 1/239 = \tan z$, $0 < z < y < \pi/4$. $\tan 2y = \frac{2\tan y}{1-\tan^2 y} = 5/12$, $0 < 2y < \pi/4$. 故に，$\tan 4y = \frac{2\tan 2y}{1-\tan^2 2y} = \frac{120}{119}$. したがって，$0 < 4y - z < \pi/2$. $\tan(4y - z) = \frac{\tan 4y \tan z}{1+\tan 4y \tan z} = 1$. これ故に，$4y + z = \pi/4$.

［３］ f は有界閉区間 $[-1, 1]$ で連続であるので，そこで一様連続である．したがって，$(-1, 1)$ でも一様連続である．f が $\mathbb{R}$ で一様連続であるとすると，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ．一方，$|x - y| = \delta/2, |x + y| \ge 2\varepsilon/\delta$ をみたす x, y は存在する．このとき，

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \ge \frac{\delta}{2}\frac{2\varepsilon}{\delta} = \varepsilon$$

となり，矛盾である．

［４］ f は I で一様連続だから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon c^2.$$

このとき，$|x - y| < \delta$ とすると，

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)||f(y)|} \le \frac{1}{c^2}|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

[5] $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$M > 0$ が存在して，$|x|, |y| > M$ ならば，$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \varepsilon$. したがって，$f$ は $(M, \infty) \cup (-\infty, -M)$ では一様連続である．$[-M, M]$ は有界閉区間であるから，そこで一様連続である．あわせて，f は $\mathbb{R}$ で一様連続である．