

解析学 I 演習 No. 1

[1] 次を日本語で表現せよ。(不等式, 等式はそのままでよい.)

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \leq 0.$

(ii) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 5 = 0.$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x - y = 3.$

(iv) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x > -(y - 1)^2.$

(v) $\alpha \in \mathbb{R}, \emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ とする.

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \alpha + \varepsilon > x.$

[2] [1] の各問について, 否定を記号を使って書き, また日本語で表現せよ.

[3] 実数の公理の中で, (1.4) における $\forall x \in \mathbb{R}, \exists_1(-x) : x + (-x) = 0.$ は

(1.4)' $\forall x \in \mathbb{R}, \exists(-x) : x + (-x) = 0$

と書いてもよいこと, すなわち, (1.4)' から (1.4) がしたがうことを証明せよ.

(一意的に存在することを \exists_1 と書く) ((1.8) についても同様である).

解析学 I 演習 No. 1 解答例

- [1] (i) 任意の (すべての) 実数 x に対して, $-x^2 \leq 0$ が成立する.
(ii) 適当な実数 x が存在して, $x^2 - 5 = 0$ となる.
(iii) 任意の実数 x に対して, 実数 y が存在して, $x - y = 3$ を満たす.
(iv) 適当な実数 x をとれば, 任意の実数 y にたいして, $x > -(y - 1)^2$ となる.
(v) 任意の正数 ε に対して, A の要素 x が存在して, $\alpha + \varepsilon > x$ を満たす.

- [2] (i) $\exists x \in \mathbb{R} : -x^2 > 0$.
適当な (ある) 実数 x が存在して, $-x^2 > 0$ を満たす.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5 \neq 0$.
任意の (すべての) 実数 x に対して, $x^2 - 5 \neq 0$ となる.
(iii) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x - y \neq 3$.
適当な実数 x が存在し, 任意の実数 y に対して, $x - y \neq 3$ となる.
(iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x \leq -(y - 1)^2$.
すべての実数 x に対して, 実数 y が存在して, $x \leq -(y - 1)^2$ を満たす.
(v) $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \alpha + \varepsilon \leq x$.
適当な正数 ε が存在して, すべての A の要素 x に対して, $\alpha + \varepsilon \leq x$ となる.

[3] (1.4) を仮定して, (1.4)' は明らかである. 逆に, (1.4)' を仮定する. $\forall x \in \mathbb{R}$ に対して, $x + (-x) = 0$ となる $(-x) \in \mathbb{R}$ は存在する. 他に, $x + y = 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) となる $y \in \mathbb{R}$ が存在したとすると,

$$\begin{aligned} y &= y + 0 \\ &= y + \{x + (-x)\} \\ &= (y + x) + (-x) \\ &= (x + y) + (-x) \\ &= 0 + (-x) \\ &= -x. \end{aligned}$$

したがって, $y = -x$ となり, このことは $x \in \mathbb{R}$ に対して $x + (-x) = 0$ となる $-x$ は一意的に存在することを意味する.

解析学 I 演習 No. 2

[1] B を下に有界な空でない集合として, $\beta = \inf B$ であることの必要十分条件は

$$\begin{cases} x \geq \beta, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B : x < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

であることを示せ.

[2] $A = \{x \in \mathbb{R} ; -1 < x \leq 1\}$ とする.

$\sup A, \inf A, \max A, \min A$ を求めよ.

[3] $A = \{x \in \mathbb{R} ; |x - a| < 1\}$ とする.

$\sup A, \inf A$ を求めよ.

[4] $B = \{x \in \mathbb{R} ; |x| < |a| + 1\}$ とする. $\sup B, \inf B$ を求めよ.

[5] $A \neq \emptyset$ とする. $\max A$ が存在するとき, $\sup A = \max A$ であることを示せ.

[6] $A \neq \emptyset$ とする. $\min A$ が存在するための必要十分条件は, A が下に有界であって, かつ $\inf A \in A$ であることを示せ.

[7] A, B を区間 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ に含まれる空でない部分集合とし, 条件 $\forall x \in A, \forall y \in B$ に対し $x \leq y$ が満たされていると仮定する. 次を証明せよ. $a \leq \inf A \leq \sup A \leq \inf B \leq \sup B \leq b$

[8] A を区間 $(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ に含まれる空でない部分集合とし, $B = \left\{ \frac{1}{x} ; x \in A \right\}$ とおく.

$$\sup B = \frac{1}{\inf A}, \tag{1}$$

$$\inf B = \frac{1}{\sup A} \tag{2}$$

を証明せよ. ただし, $1/0 = \infty, 1/\infty = 0$ と約束する.

[9] A, B を \mathbb{R} に含まれる空でない有界な部分集合とし, $C = \{x+y; x \in A, y \in B\}$ とおく. 次を証明せよ.

(i) $\sup C = \sup A + \sup B$.

(ii) $\inf C = \inf A + \inf B$.

解析学 I 演習 No. 2 解答例

[1] $\beta = \inf B$ とする. β は B の下界であるから, $\forall x \in B, x \geq \beta$ となる. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in B : x < \beta + \varepsilon$ を否定すると, $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in B, x \geq \beta + \varepsilon$ となる. これは, $\beta + \varepsilon$ が B の下界であることを意味する. しかしこのことは, β が B の最大下界であることに矛盾する. 逆に, 問題の条件が成り立つとする. 一行目は β が B の下界であることを意味する. 二行目は β が B の下界のうちで最大のものであることを意味する.

[2] $\sup A = \max A = 1, \inf A = -1, \min A$ は存在しない.

[3] $\sup A = a + 1, \inf A = a - 1$.

[4] $\sup A = |a| + 1, \inf A = -|a| - 1$.

[5] $\max A = \alpha$ とおく. 任意の $x \in A$ に対して, $x \leq \alpha$ となる. また, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \varepsilon < \alpha \in A$ となる. このことは $\alpha = \sup A$ を意味する.

[6] $\beta = \min A$ が存在したとする. このとき, [5] と同様な議論により $\min A = \inf A$ となる. $\forall x \in A, x \geq \beta$, かつ $\inf A = \beta \in A$.

逆に, A が下に有界であり, $\inf A \in A$ となったとする. $\beta = \inf A$ とおく. β は A の下界であり, $\beta \in A$ となるので, $\beta = \min A$ である.

[7] $a \leq \inf A \leq \sup A, \inf B \leq \sup B \leq b$ は明らかであるので, $\sup A \leq \inf B$ を示せばよい. 任意の $x \in A, y \in B$ に対して, $x \leq y$ となるので, y は A の上界であるから, $\sup A \leq y$ となる. また, $\sup A$ は B の下界となり $\sup A \leq \inf B$ となる.

[8] $\alpha = \inf A, \beta = \sup B$ とおく. このとき, $0 \leq \alpha < \infty$ となる.

$0 < \alpha$ のとき, 任意の $x \in A$ に対して,

$$(1) \quad x \cdot \frac{1}{x} = 1.$$

これより $\alpha \cdot \frac{1}{x} \leq 1$. すなわち, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\alpha}$. したがって, $0 < \beta \leq \frac{1}{\alpha}$. 故に, $\alpha\beta \leq 1$. 再び (1) から $x \sup B \geq 1$. これより, $x \geq 1/\beta$. したがって, $\alpha \geq 1/\beta$. あわせて, $\alpha\beta = 1$ となる.

$\alpha = 0$ のとき, 任意の $M > 0$ に対して, $x \in A$ が存在して, $x < 1/M$ となる. したがって, $1/x > M$ 故に, $\sup B > M$. これは $\sup B = +\infty$ を意味する.

$A = \left\{ \frac{1}{y}; y \in B \right\}$ と書ける. 上と同様な議論より, $\sup A = 1/\inf B$ となる.

[9] $\sup A = \alpha, \sup B = \beta$, とおく. 任意の $x \in A, y \in B$ に対して, $x \leq \alpha, y \leq \beta$ となるので, 任意の $x + y \in C$ ($x \in A, y \in B$) に対して, $x + y \leq \alpha + \beta$ である. また, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\exists x_0 \in A : \alpha - \varepsilon/2 < x_0, \exists y_0 \in B : \beta - \varepsilon/2 < y_0$ となるので, $x_0 + y_0 \in C$ が存在して, $\alpha + \beta - \varepsilon < x_0 + y_0$ となる. これは $\alpha + \beta = \sup C$ を意味する.

解析学 I 演習 No. 3

[1] 数列 $\{a_n\}$ が a に収束していることの定義は

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon \quad (1)$$

であった。以下のそれぞれは (1) に同値であることを示せ。

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n - a| \leq \varepsilon.$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$

(iii) $k > 0$ とする。 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n - a| < k\varepsilon.$

[2] 次を確かめよ。

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + n} = 1.$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n + 2} = \infty.$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + (-1)^n n) = -\infty.$

(v)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \end{cases}$$

[3] 次の極限值を求めよ。

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n}.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}.$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3}.$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - 1}{a^n + 1} \quad (a \neq -1).$

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+1)^n - a^n}{n} \quad (a > 0).$

(vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}.$

[4] (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ となることを証明せよ.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0$ となることを証明せよ.

[5] A を空でない上に有界な集合として, $\alpha = \sup A$ とおく. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ となる数列 $\{a_n\} \subset A$ が存在することを証明せよ.

[6] A を空でない下に有界な集合として, $\beta = \inf A$ とおく. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$ となる数列 $\{a_n\} \subset A$ が存在することを証明せよ.

解析学 I 演習 No. 3 解答例

[1] (1) から (i) は明らか.

(i) \implies (ii)

$\forall \varepsilon > 0$ とする. (i) で $\varepsilon/2$ を与えられたものとする, $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n - a| \leq \varepsilon/2$. したがって, $n > N$ のとき, $|a_n - a| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

(ii) \implies (iii)

$k > 0$ として, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, (ii) で $k\varepsilon$ を与えられたものとする, $\exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n - a| < k\varepsilon$.

(iii) \implies (1)

$\forall \varepsilon > 0$ に対して, (iii) で ε/k を与えられたものとする, $\exists N \in \mathbb{N} ; n \geq N \implies |a_n - a| < k(\varepsilon/k) = \varepsilon$.

[2] (i)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 1/n^2}{1 + 1/n} = 1.$$

(iii) $(n^2 + n)/(n + 2) = n - n/(n + 2)$. $n/(n + 2)$ は 1 に収束する. 一方, n は $+\infty$ に発散するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n + 2} = +\infty$.

(iv) $-n^2 + (-1)^n n = -n^2(1 - (-1)^n \frac{1}{n})$. $1 - (-1)^n \frac{1}{n} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$). したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2 + (-1)^n n) = -\infty$.

(v) $|a| < 1$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N = \lceil \frac{\log \varepsilon}{\log |a|} \rceil + 1$ とおく. このとき, $|a|^N < \varepsilon$. $n \geq N$ ならば $|a| < 1$ だから $|a^n| = |a|^n \leq |a|^N < \varepsilon$.

$a > 1$ のとき, $a = 1 + b$ とおくと, $b > 0$ となる. 二項定理より, $a^n = (b + 1)^n \geq 1 + nb \rightarrow \infty$.

$a = 1$ のときは明らかである.

[3] (i)

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n} = \sqrt{1 + 1/n} + 1 \rightarrow 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(ii)

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)/2}{n^2} \rightarrow 1/2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(iii)

$$\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)/6}{n^3} = \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} \rightarrow 1/3$$

$(n \rightarrow \infty)$.

(iv) $|a| < 1$ のとき, $\frac{a^n-1}{a^n+1} \rightarrow -1 \quad (n \rightarrow \infty)$.

$a = 1$ のとき, 明らかに $\frac{a^n-1}{a^n+1} = 0$.

$|a| > 1$ のとき, $\frac{a^n-1}{a^n+1} = \frac{1-1/a^n}{1+1/a^n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$.

(v) $(a+1)^n - a^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + na^{n-1}$. したがって, $\frac{(a+1)^n - a^n}{n} \geq \frac{n-1}{2}a^2 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$.

(vi) $|\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$.

[4] (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ より $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon/2$.
 $n \geq N$ として,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + \cdots + a_n}{n} - a \right| \\ & \leq \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_{N-1} - a|}{n} + \frac{n - (N-1)}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

いま, $N_1 \geq N$ を $n \geq N_1$ のとき,

$$\frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_{N-1} - a|}{n} < \varepsilon/2$$

をみたすようにとる. このとき, $n \geq N_1$ ならば,

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < \varepsilon$$

となる.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$ より $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n \geq N \implies |a_n - a_{n-2}| < \varepsilon/2$. $n \geq N$ として,

$$\begin{aligned} |a_n - a_{n-1}| &= |a_n - a_{n-2} - (a_{n-1} - a_{n-3}) + (a_{n-2} - a_{n-4}) \\ &\quad - \cdots - (a_N - a_{N-2}) + (a_{N-1} - a_{N-2})| \\ &\leq (n - N + 1) \frac{\varepsilon}{2} + |a_{N-1} - a_{N-2}| < \frac{\varepsilon}{2} n + |a_{N-1} - a_{N-2}|. \end{aligned}$$

いま, $N_1 \geq N$ を

$$\frac{|a_{N-1} - a_{N-2}|}{N_1} < \varepsilon/2$$

となるようにとると, $n \geq N_1$ のとき,

$$\frac{|a_n - a_{n-1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a_{N-1} - a_{N-2}|}{N_1} < \varepsilon.$$

[5] $\alpha = \sup A$ だから, $\forall x \in A, x \leq \alpha$ かつ $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \alpha - \varepsilon < x$.
ここで, $\varepsilon = 1/n$ として, 対応する $x_n \in A$ をとると,

$$x_n \leq \alpha, \quad \alpha - 1/n < x_n,$$

すなわち, $\alpha - 1/n < x_n \leq \alpha$ となる. はさみうちより $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.

[6] $\beta = \inf A$ だから, $\forall x \in A, x \geq \beta$ かつ $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : \beta + \varepsilon > x$.
ここで, $\varepsilon = 1/n$ として, 対応する $x_n \in A$ をとると,

$$x_n \geq \beta, \quad \beta + 1/n > x_n,$$

すなわち, $\beta \leq x_n < \beta + 1/n$ となる. はさみうちより $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta$.

解析学 I 演習 No. 4

[1] 数列 $\{a_n\}$ に対して, $0 < r < 1$ を満たす r と $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_0$ のとき, $a_n \neq 0$ かつ

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r$$

を満たすものとする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ であることを証明せよ.

[2] 次の極限值を求めよ.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n}.$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{n^2}.$ (不等式 $e^x > \frac{1}{6}x^3$ ($x \geq 0$) は使ってよい).

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!},$ ($a \in \mathbb{R}$).

(vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}.$

(vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a},$ ($a > 0$).

(viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}.$

(ix) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n,$ ($k \in \mathbb{N}, |a| < 1$).

[3] $\{a_n\}$ を収束数列とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ であることを示せ.

[4] $a_1 \geq 0, a_{n+1} = (a_n^2 + 1)/2, (n \in \mathbb{N})$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

[5] $a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, (n \in \mathbb{N})$ とする. $\{a_n\}$ が単調減少数列であることを示し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

解析学 I 演習 No. 4 解答例

[1] $n \geq N_0$ のとき, $|a_n| \leq r|a_{n-1}| \leq \cdots \leq r^{n-N_0}|a_{N_0}|$ であり, $0 < r < 1$ から右辺は 0 に収束するので, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

[2] (i)

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}^{-1} \rightarrow e^{-1} \quad (n \rightarrow \infty).$$

(ii)

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\ &\rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(iii) $\frac{e^n}{n^2} \geq \frac{1}{6}n \rightarrow \infty$.

(iv)

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n!}{n^n} &= \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-2}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &\leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(v) $\exists N \in \mathbb{N} : |a| < N$. $n \geq N$ として

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^{n-N} a^N}{n(n-1)\cdots N!} \leq \frac{|a|^N}{N!} \cdot \left(\frac{|a|}{N}\right)^{n-N} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

(vi) $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ とおくと, $a_n \geq 0$ である. 二項展開を利用して, $n = (1 + a_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$. したがって,

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

故に, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(vii) $a \geq 1$ のとき, $n > a$ ならば, $1 \leq \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$ となり, 前問より, 右辺は 1 に収束する. したがって挟み打ちより $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. $a < 1$ のときは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = 1.$$

(viii) 任意の $M > 0$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ を $N > M$ となるようにとる. $n \geq N$ ならば, $n! = n(n-1)\cdots(N+1)N! \geq M^{n-N}N!$ したがって,

$$\sqrt[n]{n!} \geq M^{1-N/n} \sqrt[n]{N!} \rightarrow M \quad (n \rightarrow \infty).$$

したがって, $\exists N_1 \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \implies \sqrt[n]{n!} > M/2$. 故に, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

(ix) [1] を使う.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k |a| \rightarrow |a| \quad (n \rightarrow \infty).$$

したがって, $\exists N \in \mathbb{N}, \exists 0 < r < 1 : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r < 1$. [1] より $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k a^n = 0$.

[3] $\|a_n\| - \|a\| \leq \|a_n - a\|$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \|a\|$.

[4] 帰納法から, $a_n > 0$ がわかる.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 1}{2} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2} \geq 0.$$

であるから, 数列 $\{a_n\}$ は単調増加. $0 < a_1 \leq 1$ のとき, k まで $a_k \leq 1$ を満たすとすると, $a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 1}{2} \leq 1$. 故に, $a_n \leq 1$. したがって, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界であり, 単調増加でもある. それ故に数列 $\{a_n\}$ は収束するので $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおくと $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$ で $n \rightarrow \infty$ とすれば, $\alpha = \frac{\alpha^2 + 1}{2}$ を得る. このとき, $\alpha = 1$ である. $a_1 > 1$ のとき,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 1}{2} - a_n = \frac{(a_n - 1)^2}{2} \geq \frac{(a_1 - 1)^2}{2}.$$

これより, 数列 $\{a_n\}$ は上に有界ではない. したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

[5] 帰納法から, $a_n > 0$ がわかる.

$$a_{n+1}^{-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n > a_1 + \cdots + a_{n-1} = a_n^{-1}.$$

これより, $0 < a_{n+1} < a_n$. すなわち, 数列 $\{a_n\}$ は下に有界で単調減少である. $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおくと, $\alpha \geq 0$ となる. $\alpha > 0$ のとき, 等式 $a_{n+1}^{-1} = a_n^{-1} + a_n$ で $n \rightarrow \infty$ とすると, $\alpha^{-1} = \alpha^{-1} + \alpha$ となり, 矛盾である. したがって, $\alpha = 0$.

解析学 I 演習 No. 5

[1] $a_1 \geq 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, ($n \in \mathbb{N}$) とする. $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

[2] $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$, $n \geq 3$ とする. $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを示し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

[3] $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が $2a_{n+1} = b_n + c_n$, $2b_{n+1} = c_n + a_n$, $2c_{n+1} = a_n + b_n$ を満たせば, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ はすべて, $(a_1 + b_1 + c_1)/3$ に収束することを示せ.

[4] $A (\neq \emptyset) \in \mathbb{R}$, $\alpha = \sup A$ に対し次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在することを証明せよ:

$a_n \in A$, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

解析学 I 演習 No. 5 解答例

[1] 帰納法より, $a_n \geq 0$ となる.

$$|a_{n+1} - a_n| \leq |\sqrt{a_n + 1} - \sqrt{a_{n-1} + 1}| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{\sqrt{a_n + 1} + \sqrt{a_{n-1} + 1}} \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|.$$

これから, $\{a_n\}$ はコーシー列である. コーシー列は収束するので, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおくと, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ で $n \rightarrow \infty$ とすれば, $\alpha = \sqrt{\alpha + 1}$. これを解いて, $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. $a_n \geq 0$ より, $\alpha \geq 0$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = (1 + \sqrt{5})/2$.

[2]

$$(1) a_n + \beta a_{n-1} = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \beta a_{n-1} = a_{n-1} + \beta a_{n-2} \cdots = a_2 + \beta a_1.$$

一方, $|a_n - a_{n-1}| = \beta |a_{n-1} - a_{n-2}|$. $0 < \beta < 1$ より, $\{a_n\}$ はコーシー列であるので収束する. $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ として, (1) で $n \rightarrow \infty$ とすると, $\alpha + \beta\alpha = a_2 + \beta a_1$. $\alpha = (a_2 + \beta a_1)/(1 + \beta)$.

[3] $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = \cdots a_1 + b_1 + c_1 =: \alpha$. $2a_{n+1} = b_n + c_n = \alpha - a_n$. (これより極限值は $\alpha/3$ であろうと推測する).

$$a_{n+1} - \frac{\alpha}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{\alpha}{3}\right) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_1 - \frac{\alpha}{3}\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha/3$. 同様に, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha/3$.

[4] $\alpha \in A$ のときは, $a_n = \alpha$ とおけばよい. $\alpha \notin A$ のとき, $\exists a_1 \in A$: $\alpha - 1 < a_1 < \alpha$. $\max\{a_1, \alpha - 1/2\} < \alpha$ より, $\exists a_2 : \max\{a_1, \alpha - 1/2\} < a_2 < \alpha$. 以下同様にして, $a_1 < a_2 < \cdots$ で $\alpha - 1/n < a_n < \alpha$ を満たす $a_n \in A$ が存在する. 挟み打ちより $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$.

解析学 I 演習 No. 6

[1] $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を次の方針にしたがって示せ.

(i) $x > 2$ として $[x] = n$ とおくと, $n \leq x < n+1$ となる. このとき,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

を示せ.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ をつかって, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を示せ.

[2] 次を示せ.

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.

[3] 次の極限を求めよ.

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\cos x}{x}$.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x|}{x}$. ($\lim_{x \rightarrow 0+0}$ を $\lim_{x \downarrow 0}$, $\lim_{x \rightarrow 0-0}$ を $\lim_{x \uparrow 0}$ と書くことがある).

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

(v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

[4] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を次の手順で示せ.

(i) x と $\sin x$ は奇関数であるから, $\sin x/x$ は $x \neq 0$ で定義された偶関数. したがって, $x > 0$ としてよい.

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

を図を書いて示せ. (たいていの高校の教科書に載っているはず).

(ii) はさみうちより, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示せ.

解析学 I 演習 No. 6 解答例

[1] (i) は単純な不等式の計算.

(ii)

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

を使う.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

であるから、挟み撃ちにより、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ となる.

[2] (i) $y = -x$ とおけば、 $x \rightarrow -\infty \iff y \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y \\ &= \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \rightarrow e \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(ii) $x > 0$ として、 $1/x = y$ とおけば、 $x \rightarrow +0 \iff y \rightarrow \infty$.

$$(1+x)^{1/x} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \rightarrow e \quad (x \rightarrow +0)$$

から $\lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{1/x} = e$ となる. また、 $x < 0$ として $1/x = y$ とおけば、 $x \rightarrow -0 \iff y \rightarrow -\infty$ となる. これより、

$$(1+x)^{1/x} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \rightarrow e \quad (x \rightarrow -0)$$

あわせて $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ を得る.

[3] (i) $|x \sin \frac{1}{x}| \leq |x| \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$ であるからはさみうちにより、 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

(ii) $\cos 0 = 1 > 0$ であるから、 $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\cos x}{x} = +\infty$.

(iii) $x < 0$ のとき, $|x|/x = -1$. したがって, $\lim_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{x} = -1$.

(iv)

$$\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} \rightarrow 1/2 \quad (x \rightarrow \infty).$$

(v) $x = -y$ とおくと, $x \rightarrow \infty \iff y \rightarrow -\infty$.

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \left\{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right\}^{-1} \rightarrow e^{-1} \quad (x \rightarrow \infty).$$

[4] (i) x と $\sin x$ は奇関数であるから, $\sin x/x$ は $x \neq 0$ で定義された偶関数. したがって, $x > 0$ としてよい.

$$(1) \quad \sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

を図を書いて示せ. (たいていの高校の教科書に載っているはず).

(ii) (1) から,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$x \rightarrow +0$ とすると, はさみうちより, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$. $\sin x/x$ は偶関数で

あるから, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$. あわせて, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

解析学 I 演習 No. 7

[1] $y = f(x)$ は区間 I 上で定義された連続関数, $z = g(y)$ は区間上 J で定義された連続関数で, f の値域 $R(f) := \{f(x); x \in I\}$ が $R(f) \subset J$ をみたすものとする. このとき, 合成関数 $z = g(f(x))$ は I で連続であることを証明せよ.

[2] 集合 $D \subset \mathbb{R}$ が \mathbb{R} で稠密とは, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x_n \in D$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となる数列 $\{x_n\}$ がとれることをいう. 有理数全体の集合 \mathbb{Q} が \mathbb{R} でこの意味で稠密であることを証明せよ.

[3] $f(x), g(x)$ を \mathbb{R} で連続な関数とする. また, D を \mathbb{R} で稠密な集合とする. D 上で $f(x) = g(x)$ となれば, $f(x) \equiv g(x)$ となることを証明せよ.

[4] $f(x)$ を \mathbb{R} で連続な関数とする. 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

をみたすとき, f は $f(x) = f(1)x$ と表せることを示せ.

[5] f を $I = [a, b]$ で定義された関数で, $f(I) \subset I$ をみたし, 定数 $0 < c < 1$ が存在して, 任意の $x, y \in I$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$$

を満たすものとする. このとき, f は I で連続な関数であり, $f(x) = x$ をみたす $x \in I$ がただ1つ存在することを示せ.

[6] 有界閉区間 I 上の連続関数 $f(x)$ の値域 $R(f) := \{f(x); x \in I\}$ はまた有界閉区間であることを証明せよ. ただし, 1点からなる集合も閉区間と考える.

[7] $f(x)$ は有界閉区間 I で連続な関数で $f(x) > 0$ ($x \in I$) とする. このとき, ある正の数 c が存在して, $f(x) \geq c$ ($x \in I$) となることを証明せよ.

[8] 方程式 $x - \cos x = 0$ は区間 $(0, \pi/2)$ に解をもつことを証明せよ.

解析学 I 演習 No. 7 解答例

[1] $x \in I$ とする. $\{x_n\} \subset I$ を $x_n \rightarrow x$ ($n \rightarrow \infty$) となる任意の数列とする. このとき, $y_n = f(x_n)$ とおけば, f の連続性から, $y_n \rightarrow y := f(x)$ となる. したがって, g の連続性から, $g(f(x_n)) = g(y_n) \rightarrow g(y) = g(f(x))$ となる.

[2] 各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x - 1/n < x + 1/n$ であるから, 定理 1.3.16 から, $x_n \in \mathbb{Q}$ で, $x - 1/n < x_n < x + 1/n$ となるものが存在する. このとき, はさみうちより, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となり, 数列 $\{x_n\}$ は求めるものである.

[3] \mathbb{R} の任意の要素 x に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ となる $\{x_n\} \subset D$ が存在する. このとき, $f(x), g(x)$ は \mathbb{R} で連続であるから,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x)$$

となる.

[4] (1) 任意の自然数 n に対して, $f(n) = nf(1)$ となる. 何故ならば, $n = 1$ のときは, 明らか. $n = k$ のときに成立するものとして, $n = k + 1$ のとき, $f(k + 1) = f(k) + f(1) = kf(1) + f(1) = (k + 1)f(1)$ となる.

(2) $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ より, $f(0) = 0$.

(3) $f(-1) + f(1) = f(-1 + 1) = f(0) = 0$ より, $f(-1) = -f(1)$. (1) と同様に, $f(-n) = -nf(1)$ $n \in \mathbb{N}$.

(4) 有理数 m/n ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) に対して, $mf(1) = f(m) = f(n \cdot m/n) = nf(m/n)$ より, $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1)$. したがって, 任意の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対して, $f(q) = qf(1)$ となる. [2] [3] より, 任意の実数 x に対して, $f(x) = xf(1)$ となる.

[5] $c \in I$ を任意にとり, $a_1 = c$ とおく. $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とする. このとき, $a_n \in I$ かつ,

$$|a_{n+1} - a_n| = |f(a_n) - f(a_{n-1})| \leq c|a_n - a_{n-1}|.$$

$0 < c < 1$ であるから, 数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である. コーシー列は収束するので, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ とおく. $a \leq a_n \leq b$ であるから, $\alpha \in I$ と

なる。 f は $x = \alpha$ で連続だから、 $a_{n+1} = f(a_n)$ において、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、 $\alpha = f(\alpha)$ となる。一意性は、 $f(x) = x$ をみたす点 x_1, x_2 が2つ合ったとすると、 $|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|$. $0 < c < 1$ であるから、 $x_1 = x_2$ となる。

[6] 有界閉区間 I 上の連続関数 f は、最大値、最小値をもつので、 $\alpha = \min_{x \in I} f(x), \beta = \max_{x \in I} f(x)$ とおくと $f(I) \subset [\alpha, \beta]$ となる。 $\alpha = \beta$ のときは、 $[\alpha, \beta] = \{\alpha\}$ と解釈する。任意の $\gamma \in [\alpha, \beta]$ に対して、中間値の定理より、 $f(c) = \gamma$ となる $c \in I$ が存在する。このことは、 $[\alpha, \beta] \subset f(I)$ を意味する。あわせて、 $f(I) = [\alpha, \beta]$ となる。

[7] f は有界閉区間 I で連続であるから、最小値をもつ。すなわち、 $\exists c \in I : f(c) = \min_{x \in I} f(x)$ となる。したがって、任意の $x \in I$ に対して、 $f(x) \geq f(c) > 0$.

[8] $f(x) = x - \cos x$ は連続関数で、 $f(0) = -1 < 0, f(\pi/2) = \pi/2 > 0$ であるから、中間値の定理により $f(c) = 0$ となる c が区間 $(0, \pi/2)$ に存在する。

解析学 I 演習 No. 8

[1] 次の等式を示せ.

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

[2] 次の等式を証明せよ.

$$(i) \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2 \quad (x \in [-1, 1]).$$

$$(ii) \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \pi/4.$$

$$(iii) 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} 1/239 = \pi/4.$$

[3] 関数 $f(x) = x^2$ は $(-1, 1)$ で一様連続であることを示せ. また, \mathbb{R} では一様連続ではないことを示せ.

[4] $f(x)$ は区間 I で一様連続な関数で

$$\exists c > 0 : |f(x)| \geq c \quad (\forall x \in I)$$

をみたすとする. $1/f(x)$ も I で一様連続であることを証明せよ.

[5] 関数 $f(x)$ は \mathbb{R} で連続であり,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

をみたすものとする. このとき, $f(x)$ は \mathbb{R} で一様連続であることを証明せよ.

解析学 I 演習 No. 8 解答例

[1] (i) $\frac{\log(1+x)}{x} = \log(1+x)^{1/x} \rightarrow \log e = 1 \ (x \rightarrow 0)$.
 (ii) $e^x - 1 = y$ とおくと, $x \rightarrow 0$ のとき, $y \rightarrow 0$ となる. $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\log(1+y)} = \frac{1}{\log(1+y)/y} \rightarrow 1 \ (y \rightarrow 0)$.

[2] (i) $\sin^{-1} x = y$ とおくと, $x = \sin y \ (-\pi/2 \leq y \leq \pi/2)$ となる. $x = \cos(\frac{\pi}{2} - y)$ であり, $0 \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \pi$ であるから, $\frac{\pi}{2} - y = \cos^{-1} x$ となる.

(ii) $\tan^{-1} 1/2 = y, \tan^{-1} 1/3 = z$ とおくと, $1/2 = \tan y, 1/3 = \tan z, 0 < z < y < \pi/4$.

$$\tan(y+z) = \frac{\tan y + \tan z}{1 - \tan y \tan z} = 1.$$

$0 < y+z < \pi/2$ であるから, $y+z = \pi/4$.

(iii) $\tan^{-1} 1/5 = y, \tan^{-1} 1/239 = z$ とおくと, $1/5 = \tan y, 1/239 = \tan z, 0 < z < y < \pi/4$. $\tan 2y = \frac{2 \tan y}{1 - \tan^2 y} = 5/12, 0 < 2y < \pi/4$. 故に, $\tan 4y = \frac{2 \tan 2y}{1 - \tan^2 2y} = \frac{120}{119}$. したがって, $0 < 4y - z < \pi/2$. $\tan(4y - z) = \frac{\tan 4y \tan z}{1 + \tan 4y \tan z} = 1$. これ故に, $4y - z = \pi/4$.

[3] f は有界閉区間 $[-1, 1]$ で連続であるので, そこで一様連続である. したがって, $(-1, 1)$ でも一様連続である. f が \mathbb{R} で一様連続であるとすると,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ. 一方, $|x - y| = \delta/2, |x + y| \geq 2\varepsilon/\delta$ をみたす x, y は存在する. このとき,

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \geq \frac{\delta}{2} \frac{2\varepsilon}{\delta} = \varepsilon$$

となり, 矛盾である.

[4] f は I で一様連続だから,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon c^2.$$

このとき, $|x - y| < \delta$ とすると,

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|f(x)||f(y)|} \leq \frac{1}{c^2} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

[5] $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $M > 0$ が存在して、 $|x|, |y| > M$ ならば、 $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \varepsilon$. したがって、 f は $(M, \infty) \cup (-\infty, -M)$ では一様連続である. $[-M, M]$ は有界閉区間であるから、そこで一様連続である. あわせて、 f は \mathbb{R} で一様連続である.