1

解析学III（多変数関数の偏微分と重積分）

理工学部理学系

第1章　多変数の関数の連続性

1.1　n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_j \in \mathbb{R}\ (j = 1, 2, \ldots, n)\}.$

$\mathbb{R}^n$ が線形空間であること．

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，和とスカラー積を以下で定義する．

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \quad \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

この演算により $\mathbb{R}^n$ は実線形（ベクトル）空間となる．

$\mathbb{R}^n$ が内積空間であること．

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

を x と y の内積という．このように内積の定義された $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間といい，x を $\mathbb{R}^n$ の点という．

$(x, x) \geq 0$ であるから，

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

とおいて，$|x|$ を x の長さまたは絶対値と呼ぶ．

定理 1.1.1. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，

シュワルツの不等式： $|(x, y)| \leq |x||y|$ が成立する．

三角不等式：$|x + y| \leq |x| + |y|$ が成立する．

命題 1.1.2. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$|x_k| \leq |x| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

定義 1.1.3. $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^{(m)} = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)\}_{m=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}^n$ の点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ に収束することを

$$\lim_{m \to \infty} |x^{(m)} - x| = 0$$

により定義する．

このとき，$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$ と書く．命題 1.1.2 から，このことは，各 $k = 1, 2, \dots, n$ に対して，$\lim_{m \to \infty} x_k^{(m)} = x_k$ となることと同値である．

$\mathbb{R}^n$ の完備性

定義 1.1.4. $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^{(m)}\}$ がコーシー列であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; m, l \geq N \Longrightarrow |x^{(m)} - x^{(l)}| < \varepsilon$$

となることである．

定理 1.1.5 ($\mathbb{R}^n$ の完備性)**.** $\mathbb{R}^n$ は完備である．すなわち $\mathbb{R}^n$ の任意のコーシー列は $\mathbb{R}^n$ のある点に収束する．

定義 1.1.6. $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{x^{(m)}\}$ に対して，ある定数 $M > 0$ が存在して，

$$|x^{(m)}| \leq M \quad (m = 1, 2, \dots)$$

となるとき，点列 $\{x^{(m)}\}$ は有界であるという．

定理 1.1.7 (ボルツアーノ・ワイエルシュトラスの定理)**.** $\mathbb{R}^n$ の有界な点列は収束する部分列をもつ．

定義 1.1.8. $\mathbb{R}$ の区間 $I = [0, 1]$ を $\mathbb{R}^n$ に写す写像

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad (t \in [0, 1])$$

が連続のとき，すなわち，$\lim_{t \to a} x(t) = x(a) \quad (\forall a \in [0, 1])$ が成り立つとき $x(t)$ を $\mathbb{R}^n$ 内の連続曲線といい，$a = x(0)$ を始点, $b = x(1)$ を終点という．また，この曲線を a と b を結ぶ連続曲線ともいう．

定義 1.1.9. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D が連結であるとは，任意の 2 点 $a,b \in D$ に対して，a と b を結ぶ D 内の連続曲線が存在することである．

定義 1.1.10. 点 $a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して，集合

$$U_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n ; |x - a| < r\}$$

を中心 a，半径 r の開球または開近傍という．

定義 1.1.11. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D が開集合であるとは，任意の $a \in D$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$U_\delta(a) \subset D$ となることである．

定義 1.1.12. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 F が閉集合であるとは，F の補集合 F^C が開集合であることである．

定義 1.1.13. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D が領域であるとは，D が連結開集合を意味する．

定義 1.1.14. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D が閉領域であるとは，D が連結な閉集合を意味する．

定義 1.1.15. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D が有界であるとは，ある $R > 0$ が存在して，$D \subset U_R(0)$ となることである．

1.1.1 写像と多変数関数

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A の各点 $x \in A$ に対して，$\mathbb{R}^m$ の点 $f(x) \in \mathbb{R}^m$ が定まっているとき，f は A から $\mathbb{R}^m$ への写像という．これを

$$f : A \to \mathbb{R}^m, \quad f : \mathbb{R}^n \supset A \to \mathbb{R}^m, \quad f : x \mapsto f(x), \quad f : A \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$$

等で表す．A を f の定義域，

$$R(f) := \{f(x) ; x \in A\}$$

を f の値域という．

写像の和とスカラー倍 $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ に対して，和を $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A$ で， スカラー倍を $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in A$ で定義すると，写像の全体は線形空間となる．

$n = m = 1$ のときは，1 変数の関数であり，$n > 1, m = 1$ のとき，多変数関数といわれ，

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$$

のように表せる．$m > 1$ のとき，f は多変数写像といわれ，$f(x)$ は $\mathbb{R}^m$ の点だから，

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

または

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

と書ける．

定義 1.1.16 (**写像の極限**)**.** $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ とする．$a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ として，$x \to a$ のとき，$f(x)$ が点 $b = (b_1, \ldots, b_m)$ に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$x \in A$ かつ $0 < |x - a| < \delta$ のとき，$|f(x) - b| < \varepsilon$ が成り立つことである．このとき，

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{または} \quad f(x) \to b \quad (x \to a)$$

と書く．

例 1.1.17. *(1)* 2 変数関数の極限値

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{5x^2 y}{x^2 + y^2}$$

を求める．
関数を $f(x, y)$ とおき，$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，$x^2 + y^2 = r^2 \to 0$ であり，

$$|f(x, y)| = |\frac{5x^2 y}{x^2 + y^2}| \leq 5r|\sin\theta\cos^2\theta| \leq 5r \to 0 \quad (r \to 0)$$

であるから，

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{5x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

(1) 2 変数関数の極限値

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

を求める．
関数を $f(x,y)$ とおき，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおくと，$x^2+y^2=r^2\to 0$ であり，

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}=2\cos\theta\sin\theta$$

$\theta=0$ のとき，$f(x,y)=0$ となり，$\theta=\pi/4$ のとき，$f(x,y)=1$ となる．したがって極限値は存在しない．

または，$y=mx$ に沿って，$(0,0)$ に近づくと，

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2m}{1+m^2}$$

であるから，その極限値は m の値によって異なる．したがって極限値は存在しない．

定義 1.1.18 (写像の連続性). $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ とする．f が $a\in A$ で連続であるとは，$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ が成り立つことである．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$x\in A$ かつ $|x-a|<\delta$ のとき，$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つことである．また，A の各点で連続なとき，f は A で連続であるといわれる．

注意 1.1.19. 連続写像の和や定数倍はまた連続である．(一変数の場合と同様)

定理 1.1.20. 有界閉集合 $F\subset\mathbb{R}^n$ 上で連続な関数は，最大値および最小値をとる．すなわち，$x_M, x_m\in F$ が存在して，

$$f(x_m)\le f(x)\le f(x_M)\quad (x\in F)$$

となる．

定義 1.1.21 (写像の一様連続性). $f: A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ とする．f が A で一様連続であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，$x,x'\in A$ かつ $|x-x'|<\delta$ のとき，$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ が成り立つことである．

定理 1.1.22. 有界閉集合 $F\subset\mathbb{R}^n$ 上で連続な関数は，F で一様連続である．

第2章　多変数関数の偏微分

この章では，簡単のために，2変数の関数 $z = f(x, y)$ を扱う．3変数以上の関数についても全く同様に取り扱われる．

2.1　偏導関数と全微分可能性

定義 2.1.1 (偏導関数の定義). 関数 $z = f(x, y)$ が領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義されているとする．f が点 $(a, b) \in D$ で x に関して偏微分可能であるとは，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在することをいい，その極限値を $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), f_x(a, b), z_x(a, b)$ 等で表し，f の (a, b) での x に関する偏微分係数と呼ぶ．すなわち，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

右辺の極限値が存在するときに限りそれを左辺で表すことに注意.

同様に，f が点 $(a, b) \in D$ で y に関して偏微分可能であるとは，

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}$$

が存在することをいい，その極限値を $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), f_y(a, b), z_y(a, b)$ 等で表し，f の (a, b) での y に関する偏微分係数と呼ぶ．すなわち，

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

ちなみに，呼び方は例えば，$\frac{\partial f}{\partial x}$ はラウンド f ラウンド x と呼ぶ.

f が D の各点で x に関して偏微分可能なとき，f は D で x に関して偏微分可能であるといい，各点に対応する関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ を f の x に関する偏導関数という．同様に，f が D の各点で y に関して偏微分可能

なとき，f は D で y に関して偏微分可能であるといい，各点に対応する関数 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を f の y に関する偏導関数という．x に関しても y に関しても偏微分可能のとき，単に偏微分可能であるという．

例 2.1.2. (x,y) に対して，$r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ を考える．r は領域 $D = \{(x,y);(x,y) \neq (0,0)\}$ で偏微分可能であり，その偏導関数は，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

となる．

簡単な関数の偏微分については，基礎微積分 B でやったのを思い出してください．

例 2.1.3. $f(x,y) = |x|$ は原点 $(0,0)$ で y に関して偏微分可能であるが ($\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$)，$x$ に関しては偏微分可能ではない．実際，

$$\lim_{h\to 0}\} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

となり，極限値は存在しないので，$f(x,y) = |x|$ は $(0,0)$ では x に関して偏微分可能ではない．一方，

$$\lim_{k\to 0}\} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

となり，$f(x,y) = |x|$ は y に関して $(0,0)$ で偏微分可能であり，$f_y(0,0) = 0$ となる．

1 変数のときの復習.

$f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとは，極限値

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A$$

が存在することであった．そしてそのとき，$A = f'(x) = \frac{df}{dx}(a)$ と書いた．このことは，$A \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + r(x)$$

とおくと，

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0$$

となることと同値である．このとき，$r(x) = o(|x-a|)$ $(x \to a)$ と書き $r(x)$ は $x \to a$ のとき，スモールオーダー $|x-a|$ であるという．すなわち，f が $x = a$ で微分可能であるとは，定数 A が存在して，

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(|x-a|),\ (x \to a)$$

となることであり，このとき A を $A = f'(a)$ と書く．

定義 2.1.4. 関数 $f(x,y)$ は領域 D で定義されていて，$(a,b) \in D$ とする．A, B が存在して，

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + r(x,y) \tag{2.1}$$

とおくとき，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0 \tag{2.2}$$

すなわち，A, B が存在して，

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ A(x-a) + B(y-b) \\ &+ o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}),\ (x,y) \to (a,b) \end{aligned}$$

が成り立つならば，f は (a,b) で全微分可能であるという．D の各点で全微分可能なとき，f は D で全微分可能であるという．

定理 2.1.5. f が (a,b) で全微分可能であれば，(a,b) で偏微分可能であり，上の定義の記号で，

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

が成り立つ．

証明．(2.1), (2.2) で $x = a+h, y = b$ とおくと，

$$f(a+h,b) - f(a,b) = Ah + r(a+h,b), \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(a+h,b)}{|h|} = 0$$

であるから，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A$$

は存在し，$A = f_x(a,b)$．同様に，(2.1), (2.2) で $x = a, y = b+k$ とおけば，f は y に関して偏微分可能であり，$B = f_y(a,b)$ となる．　□

注意 2.1.6. f が偏微分可能でも全微分可能であるとは限らない．例えば，関数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

は原点で偏微分可能であり，$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ となるが，$(0,0)$ で全微分可能ではない．何故ならば，いま $f(x,y)$ が原点で全微分可能であるとすると，$f(0,0) = 0, f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ であるから定理 *2.1.6* より，

$$f(x,y) = f(0,0) + xf_x(0,0) + f_y(0,0) + o(\sqrt{x^2+y^2}) = o(\sqrt{x^2+y^2})$$

$(x,y) \to (0,0)$ と書ける．これは，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

を意味する．しかしこの極限は存在しないことはすでに示しているので，矛盾がおこる．

定理 2.1.7. 関数 $f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で全微分可能であれば，$f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で連続である．

証明．(2.1) と (2.2) から明らかである．　□

定理 2.1.8. $f(x,y)$ が領域 D で偏微分可能で，$f_x(x,y) = f_y(x,y) \equiv 0$ ならば，$f(x,y)$ は定数関数である．

証明．$f_x(x,y) \equiv 0$ であるから，$f(x,y)$ は x に関して定数．すなわち，$f(x,y) = h(y)$ と書ける．$h(y)$ は y に関して微分可能で，$h'(y) = f_y(x,y) \equiv 0$ であるから，y に関して定数．すなわち，$f(x,y) = c$,（c は定数）と書ける．　□

定理 2.1.9 (全微分可能性の十分条件). $f(x,y)$ が領域 D で偏微分可能で，偏導関数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ が D で連続ならば，$f(x,y)$ は D で全微分可能である．

証明．$(a,b) \in D$ を任意にとり固定する．

$$r(x,y) = f(x,y) - \{f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)\}$$

と書く．

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$

を示せばよい．$r(x,y) = r_1(x,y) + r_2(x,y)$,

$$\begin{aligned} r_1(x,y) &= f(x,y) - f(a,y) - f_x(a,b)(x-a), \\ r_2(x,y) &= f(a,y) - f(a,b) - f_y(a,b)(y-b) \end{aligned}$$

とおく．

$$r_1(x,y) = \int_a^x \{f_x(t,y) - f_x(a,b)\}dt$$

と書ける．f_x は連続だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を適当にとれば，$|(x,y)-(a,b)| < \delta$ のとき，上の積分範囲において，$|f_x(t,y) - f_x(a,b)| < \varepsilon$ となる．したがって，$|(x,y)-(a,b)| < \delta$ ならば，$|r_1(x,y)| \leq \varepsilon|x-a| \leq \varepsilon|(x,y)-(a,b)|$ となり，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{r_1(x,y)}{|(x,y)-(a,b)|} = 0$$

となる．すなわち，$r_1(x,y) = o(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2})$, $(x,y) \to (a,b)$. $r_2(x,y)$ についても同様． □

方向微分と勾配ベクトル

定義 2.1.10. $\boldsymbol{e} = (u,v)$, $(u^2+v^2=1)$ を単位ベクトルとする．$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$D_{\boldsymbol{e}}f(a,b) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(a+tu, b+tv) - f(a,b)}{t}$$

が存在するとき，f は (a,b) で，$\boldsymbol{e}$ 方向に微分可能であるといい，$D_{\boldsymbol{e}}f(a,b)$ を $\boldsymbol{e}$ 方向の方向微分係数という．

定理 2.1.11. f が $(x,y) = (a,b)$ で全微分可能とする．このとき，任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e} = (u,v)$ に対して，f は $\boldsymbol{e}$ 方向に方向微分可能で，

$$D_{\boldsymbol{e}}f(a,b) = u\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + v\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

となる．

証明．f は (a,b) で全微分可能だから，

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + r(h,k), \\ &\lim_{(h^2+k^2)^{1/2}\to 0} \frac{r(h,k)}{(h^2+k^2)^{1/2}} = 0 \end{aligned}$$

と書ける．したがって，$\boldsymbol{e}=(u,v)$, $u^2+v^2=1$ に対して，$h=tu, k=tv$ $(t>0)$ とおくと上の式は，

$$f(a+tu,b+tv) = f(a,b)+tuf_x(a,b)+tvf_y(a,b)+r(tu,tv),$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{r(tu,tv)}{t}=0$$

と書ける．故に，

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(a+tu,b+tv)-f(a,b)}{t}=uf_x(a,b)+vf_y(a,b). \quad \square$$

定義 2.1.12 (グラディエント)**.** f が (a,b) で全微分可能なとき，ベクトル

$$\nabla f(a,b)=\mathrm{grad} f(a,b)=(f_x(a,b),f_y(a,b))$$

を f の (a,b) における勾配ベクトルとい言う．(grad は *gradient* の略で，∇ はナブラと呼ばれる．)

注意 2.1.13. 勾配ベクトルを使うと，方向微分係数は，

$$D_{\boldsymbol{e}}f(a,b)=\boldsymbol{e}\cdot\nabla f(a,b)$$

と書ける．ここで，ベクトル $\boldsymbol{w}_1=(u_1,v_1), \boldsymbol{w}_2=(u_2,v_2)$ に対して，$\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2=u_1u_2+v_1v_2$ は内積を意味する．シュワルツの不等式：$|\boldsymbol{w}_1\cdot\boldsymbol{w}_2|\le|\boldsymbol{w}_1||\boldsymbol{w}_2|$ を使うと，$|\boldsymbol{e}|=1$ であるから，

$$|D_{\boldsymbol{e}}f(a,b)|=|\boldsymbol{e}\cdot\nabla f(a,b)|\le|\nabla f(a,b)|.$$

とくに，$\nabla f(a,b)\ne(0,0)$ のとき，$\boldsymbol{e}=\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}$ とおくと，$\boldsymbol{e}$ は勾配ベクトルの方向の単位ベクトルとなり，

$$D_{\boldsymbol{e}}f(a,b)=\frac{\nabla f(a,b)}{|\nabla f(a,b)|}\cdot\nabla f(a,b)=|\nabla f(a,b)|$$

となるので，方向微分係数は勾配ベクトル $\nabla f(a,b)$ の方向で最大値 $|\nabla f(a,b)|$ をとり，$-\nabla f(a,b)$ の方向で最小値 $-|\nabla f(a,b)|$ をとる．

例 2.1.14. 関数 $f(x,y)=x^2+y^2-4$ の点 $(1,2)$ におけるベクトル $\boldsymbol{e}=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ 方向への方向微分係数を求めよ．

$\nabla f(x,y)=(f_x,f_y)=(2x,2y)$ であるから，$\nabla f(1,2)=(2,4)$ となる．したがって，

$$\boldsymbol{e}\cdot(\nabla f)(1,2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 4=\sqrt{2}.$$

2.2　合成関数の微分

定理 2.2.1. $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能であり，$x=x(t), y=y(t)$ は $t=t_0$ で微分可能であるとする．ただし，$(x(t_0),y(t_0))=(a,b)$ とする．このとき，合成関数 $z(t)=f(x(t),y(t))$ は $t=t_0$ で微分可能であり，

$$\frac{dz}{dt}(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))x'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0))y'(t_0)$$

が成り立つ．

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

と書くと覚えやすい．

証明．$f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能であるから，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b)+(x-a)f_x(a,b)+(y-b)f_y(a,b) \\ &\qquad +o\left(\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}^{1/2}}\right) \end{aligned}$$

と書ける．一方 $x=x(t), y=y(t)$ は $t=t_0$ で微分可能であるから，

$$x(t)=x(t_0)+(t-t_0)x'(t_0)+o(|t-t_0|), y(t)=y(t_0)+(t-t_0)y'(t_0)+o(|t-t_0|)$$

と書ける．$(x(t_0),y(t_0))=(a,b)$ および，$o(\{(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2\}^{1/2})=o(|t-t_0|)$ に注意して，上の 2 つの等式から，

$$\begin{aligned} z(t)=f(x(t),y(t)) &= f(a,b)+(x(t)-x(t_0))f_x(a,b) \\ &\quad +(y(t)-y(t_0))f_y(a,b) \\ &\quad +o(\sqrt{\{((x(t)-x(t_0))^2+(y(t)-y(t_0))^2\}}). \\ &= f(a,b)+(t-t_0)\{f_x(a,b)x'(t_0)+f_y(a,b)y'(t_0)\} \\ &\quad +o(|t-t_0|). \end{aligned}$$

これより，$z(t)$ は $t=t_0$ で微分可能であり，$z'(t_0)=f_x(a,b)x'(t_0)+f_y(a,b)y'(t_0)$ となる．　□

定理 2.2.2. $f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能であり，$x=x(t,s), y=y(t,s)$ は $(t,s)=(t_0,s_0)$ で全微分可能であるとする．ただし，ここで $(x(t_0,s_0),y(t_0,s_0))=(a,b)$ とする．このとき，合成関数

$$z(t,s)=f(x(t,s),y(t,s))$$

は $(t,s)=(t_0,s_0)$ で全微分可能であり,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t}(t_0,s_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0,s_0),y(t_0,s_0))\frac{\partial x}{\partial t}(t_0,s_0)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0,s_0),y(t_0,s_0))\frac{\partial y}{\partial t}(t_0,s_0))\\ \frac{\partial z}{\partial s}(t_0,s_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0,s_0),y(t_0,s_0))\frac{\partial x}{\partial s}(t_0,s_0)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0,s_0),y(t_0,s_0))\frac{\partial y}{\partial s}(t_0,s_0))\end{aligned}$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\end{aligned}$$

と書くと覚えやすい.

証明. 偏微分の定義と前定理より明らか. □

例 2.2.3. *(i)* $z=f(x,y)=xy,\ x=t^2, y=t$ のときの合成関数の微分を求めよ.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=y\cdot(2t)+x\cdot(1)=t(2t)+t^2=3t^2.$$

(ii) $z=f(x,y)=e^{-x}\sin y,\ x=u^2+v^2, y=2u+v$ のときの合成関数の偏微分を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= -(e^{-x}\sin y)2u+(e^{-x}\cos y)\cdot 2\\ &= e^{-(u^2+v^2)}\{2\cos(2u+v)-2u\sin(2u+v)\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= -(e^{-x}\sin y)2v+(e^{-x}\cos y)\cdot 1\\ &= e^{-(u^2+v^2)}\{\cos(2u+v)-2v\sin(2u+v)\}.\end{aligned}$$

2.3　写像のヤコビ行列

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 $y = y(x)$ を考える．成分で表すと， $y_j = y_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ このとき，$m \times n$ 行列

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を写像のヤコビ行列といい，簡単に $\dfrac{\partial(y)}{\partial(x)}$ とも書く．特に $n = m$ のときにはヤコビ行列は正方行列である．その行列式をヤコビアンといい，

$$\frac{D(y)}{D(x)} = \frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \det\left(\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right) = \left|\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|$$

等で表す.

例 2.3.1 (2 次元極座標). $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ $(r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とおくと，

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r.$$

例 2.3.2 (3 次元極座標). $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ $(r \geq 0, 0 < \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$ とおくと，

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta.$$

2.4　高階偏導関数

このセクションでは，再び $n = 2$ とする．

2.4.1　2 階偏導関数

ある領域 D における関数 $f(x, y)$ の偏導関数 がさらに偏微分可能なとき，その偏導関数を f の 2 階偏導関数といい，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

をそれぞれ，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

等で書く．

注意 2.4.1. 一般には，$f_{xy} = f_{yx}$ とならない．

例 2.4.2.

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

において，$f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ を計算してみよ．

定理 2.4.3. $f(x,y)$ が領域 D で定義されていて，そのすべての 2 階偏導関数が存在して連続ならば，2 階偏導関数の値は微分の順序によらない．すなわち，

$$f_{xy} = f_{yx}.$$

証明．$(a,b) \in D$ を任意の点とする．$h \neq 0, k \neq 0$ に対して，

$$\Delta = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$$

とおく．$F(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$ とおくと，$\Delta = F(a+h) - F(a)$. 平均値の定理より，$\theta_1 \in (0,1)$ が存在して，$F(a+h) - F(a) = hF'(a+\theta_1 h)$ と書ける．すなわち，$\Delta = h\{f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)\}$. 再び平均値の定理より，$\theta_2 \in (0,1)$ が存在して，$\Delta = hkf_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$. 同様に $G(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ とおくと，同様な議論から，$\Delta = hkf_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k)$ $(\theta_3, \theta_4 \in (0,1))$. hk で割って，

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k).$$

f_{xy}, f_{yx} は D で連続であるから，$h \to 0, k \to 0$ とすれば，$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ を得る．

2.4.2　高階偏導関数

2 階偏導関数がさらに偏微分可能であれば，3 階偏導関数が得られる．同様にして，m 階偏導関数を定義することができる．定理 2.4.3 を繰り返して使えば，領域 D で m 階までの偏導関数が存在して連続であれば，m 階までの偏導関数は微分の順序によらないことがわかる．

定義 2.4.4. $D \subset \mathbb{R}^2$ は領域，m は非負整数とし，$f(x,y)$ は D 上の関数であるとする．

(i) $f(x,y)$ の m 階までのすべての偏導関数が存在し連続であるとき，$f(x,y)$ は D で C^m 級であるといい，$f \in C^m(D)$ と書く．(C^0 級とは $f(x,y)$ が連続であることを意味する）．

(ii) $C^\infty(D) = \cap_{m=1}^\infty C^m(D)$ と定義する．すなわち，$f \in C^\infty(D)$ とは，すべての導関数が存在して連続であることを意味する．

2.5 テイラーの定理

定理 2.5.1. $f(x,y)$ を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で C^{m+1} 級の関数とし，$(a,b),(a+h,b+k) \in D$ で，(a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれる，すなわち，$\{(a+th,b+tk); 0 \le t \le 1\} \subset D$ とする．このとき，$0<\theta<1$ が存在して，

(T)

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+\frac{1}{1!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(a,b)+\cdots+\frac{1}{m!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^m f(a,b) + \frac{1}{(m+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{m+1} f(a+\theta h, b+\theta k)$$

と書ける．ここで，

$$(M) \qquad (h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^l f(a,b) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} h^{l-i}k^i \left(\frac{\partial^l f}{\partial x^{l-i}\partial y^i}\right)(a,b).$$

であり，(T) の最後の項を剰余項という．

証明．1 変数のマクローリンの定理を使う．すなわち，$F(t) \in C^{m+1}[0,1]$ として，

$$F(t) = F(0)+\frac{1}{1!}tF'(0)+\cdots+\frac{1}{m!}t^m F^{(m)}(0)+\frac{1}{(m+1)!}F^{(m+1)}(\theta t), \quad (0<\theta<1).$$

$F(t) = f(a+th,b+tk)$ とおくと，$F \in C^{m+1}([0,1])$ であるから 1 変数のマクローリンの定理より，(T) の様に書ける．ここで，

$$F'(0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \left((h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f\right)(a,b).$$

同様に，

$$F^{(l)}(0) = \left((h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^l f \right)(a,b)$$

に注意する．最後に，$t=1$ とおけば良い．　□

2.6　多変数関数の極大・極小

定義 2.6.1. $f(x,y)$ が領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義されているとする．$(a,b) \in D$ とする．$f(x,y)$ が点 (a,b) で極大であるとは，ある $r>0$ が存在して，$(x,y) \in B((a,b),r) := \{(x,y);(x-a)^2+(y-b)^2 < r^2\}$ のとき，$f(x,y) \le f(a,b)$ となることである．また，さらに $(x,y) \in B((a,b);r) \setminus \{(a,b)\}$ のとき，$f(x,y) < f(a,b)$ のときは狭義の極大であるという．不等号の向きが逆のときは，それぞれ極小，狭義の極小であるという．

定理 2.6.2. $f(x,y)$ は $(a,b) \in D$ で偏微分可能とする．$f(x,y)$ が (a,b) において，極大（または極小）になるならば，$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ となる．すなわち，$\nabla f(a,b) = 0$.

証明．$y=b$ を固定して，$f(x,b)$ を x の関数と考えれば，$x=a$ で極大となる．したがって，$f_x(a,b)=0$. 同様に，$f_y(a,b)=0$ となる．　□

定義 2.6.3. D を領域とし，$f \in C^1(D)$ とする．$(a,b) \in D$ で $\nabla f(a,b) = 0$ となるとき，点 (a,b) を f の臨界点（停留点）という．その値 $f(a,b)$ を臨界値（停留値）という．

注意 2.6.4. f の臨界点 (a,b) で f が（狭義の）極大となるとき，(a,b) は f の（狭義の）極大点という．また，f の臨界点 (a,b) で f が（狭義の）極小となるとき，(a,b) は f の（狭義の）極小点という．臨界点であることは，極大点または極小点であるための必要条件ではあるが，十分条件ではない．

例 2.6.5. $D = \{(x,y); x^2+y^2 < 1\}$ として，関数 $f(x,y) = c^2x^2 + d^2y^2,\quad (c,d \neq 0)$ を考える．$\nabla f(x,y) = (2c^2x, 2d^2y)$ であるから，臨界点は $(x,y)=(0,0)$ のみで臨界値は $f(0,0)=0$ となる．一方，$f(x,y) \ge 0$ であり，等号は $(x,y)=(0,0)$ においてのみだから，$(0,0)$ は狭義の極小点である．

次に，関数 $f(x,y) = -c^2x^2 + d^2y^2,\quad (c,d \neq 0)$ を考える．$\nabla f(x,y) = (-2c^2x, 2d^2y)$ であるから，臨界点は $(x,y)=(0,0)$ のみで臨界値は $f(0,0)=$

0 となる．一方，$x=0, y\neq 0$ とすると，$f(x,y)>0$ であり，$x\neq 0, y=0$ とすると，$f(x,y)<0$ であるから，$(0,0)$ は極大点でも極小点でもない．

定理 2.6.6. $D\subset\mathbb{R}^2$ を領域，$f\in C^3(D)$ とし，(a,b) は f の臨界点であるとする．

$$H_f(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-f_{xy}(a,b)^2$$

とおく．

(i) $H_f(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$ ならば，(a,b) は f の狭義の極小点である．

$H_f(a,b)>0$ かつ $f_{xx}(a,b)<0$ ならば，(a,b) は f の狭義の極大点である．

(ii) $H_f(a,b)<0$ ならば，(a,b) は f の極小点でも極大点でもない．（鞍点である）．

(iii) $H_f(a,b)=0$ のときは，極大点であるか，極小点であるか，どちらでもないかについては，一般的には断言は出来ない．

証明の前に，次の 2 次形式 $Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ を考える．ただし，a,b,c の少なくとも 1 つはゼロではないとする．$\nabla Q(x,y)=(2ax+2by, 2bx+2cy)$ であるから，臨界点は連立方程式 $ax+by=0,\quad bx+cy=0$ の解である．その係数行列の行列式は $ac-b^2$ である．したがって，$ac-b^2\neq 0$ のときは臨界点は $(0,0)$ のみであり，$ac-b^2=0$ のときは臨界点の集合は x,y 平面上の直線となる．

補題 2.6.7. *(i)* $ac-b^2>0$ のとき，$a>0$ ならば $(0,0)$ は狭義の極小点，$a<0$ ならば狭義の極大点である．

(ii) $ac-b^2<0$ のとき，$(0,0)$ は極小点でも極大点でもない．（鞍点である）．

(iii) $ac-b^2=0$ のとき，$(0,0)$ は Q の極小点または極大点であるが，狭義ではない．この場合，$ac\geq 0$ で a,c がともに 0 となることはなく，0 でないものが正ならば極小，負ならば極大である．

補題の証明．$a\neq 0$ とすれば，$Q(x,y)$ を以下のように平方完成できる．

$$(Q)\qquad Q(x,y)=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}y^2.$$

(i) のとき，$ac>0$ となり，特に $a\neq 0$ であるから，$a>0$ のとき，$Q(x,y)>0, (x,y)\neq(0,0)$ となり，$a<0$ のとき，$Q(x,y)<0=Q(0,0)$, $(x,y)\neq(0,0)$ となる．

(ii) のとき，$a = c = 0$ ならば，$Q(x, y) = 2bxy$ だから明らか．$a \neq 0$ のときは，$X = x + \frac{b}{a}y, Y = y, \alpha = \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$ とおくと，

$$Q(x, y) = a(X^2 - \alpha^2 Y^2) = a(X - \alpha Y)(X + \alpha Y)$$

であるから，結論は成り立つ．$a = 0, c \neq 0$ のときは，$Q(x, y)$ で x と y, a と c の役割を代えた式より，結論が成り立つ．

(iii) のとき，(Q) と，a と c の役割を代えた式から明らか．

定理 2.6.6 の証明．記号の簡略のため，$(a, b) = (0, 0)$ とする．テイラーの定理の 2 次近似を考える．$(0, 0)$ は臨界点だから，$(0, 0)$ の近くで

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \rho(x, y)$$
$$|\rho(x, y)| \leq M(\sqrt{x^2 + y^2})^3)$$

と書ける．$a = f_{xx}(0, 0), b = f_{xy}(0, 0), c = f_{yy}(0, 0)$ とおいて，$Q(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ とすると，

$$f(x, y) = f(0, 0) + Q(x, y) + \rho(x, y), \quad 2H_f(0, 0) = ac - b^2$$

と書ける．

(i) $H_f(0, 0) > 0$ のとき，補題 2.6.7 より，$a > 0$ ならば，$Q(x, y) > 0$ $((x, y) \neq (0, 0))$, $a < 0$ ならば，$Q(x, y) < 0$ $((x, y) \neq (0, 0))$. $a > 0$ のとき，$Q(x, y)$ は連続関数であるから，$\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ 上最小値 $\mu > 0$ をとる．$Q(x, y)$ は 2 次斉次関数であるから，

$$Q(x, y) \geq (x^2 + y^2)Q(x/\sqrt{x^2 + y^2}, y/\sqrt{x^2 + y^2}) \geq \mu(x^2 + y^2)$$

となる．故に，

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(0, 0) &= Q(x, y) + \rho(x, y) \\ &\geq Q(x, y) - |\rho(x, y)| \\ &\geq \mu(x^2 + y^2) - M(x^2 + y^2)^{3/2} \\ &= (\mu - M\sqrt{x^2 + y^2})(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

右辺は，$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \mu/M$ のとき正であるから，そのとき，$f(x, y) > f(0, 0)$ となり，$(0, 0)$ は f の狭義極小点である．$a < 0$ のときは同様の考察により，狭義極大点となる．

(ii) 補題 2.6.7 より，$Q(c,d) > 0, Q(e,f) < 0$ となる $(c,d),(e,f)$ が存在する．$t > 0$ として，

$$\begin{aligned} f(tc,td) - f(0,0) &\geq Q(tc,td) - |\rho(tc,td)| \\ &\geq t^2 Q(c,d) - Mt^3(c^2+d^2)^{3/2} \\ &= (Q(c,d) - M(c^2+d^2)^{3/2}t)t^2 \end{aligned}$$

であるから，$t > 0$ が十分小さいときには，$f(tc,td) - f(0,0) > 0$ となる．同様にして，$t > 0$ が十分小さいとき $f(te,tf) - f(0,0) < 0$ となる．したがって，$(0,0)$ は f の極大点でも極小点でもなく鞍点となる．

(iii) 例えば，$f(x,y) = x^2 + y^4$ のとき，$f_{xx}(0,0) = 2, f_{xy}(0,0) = 0, f_{yy}(0,0) = 0$ となり，(iii) の場合であるが，このとき，$(0,0)$ が狭義の極小点であることは明らか．一方，例えば，$f(x,y) = x^2 + y^3$ とすると，やはり，$f_{xx}(0,0) = 2, f_{xy}(0,0) = 0, f_{yy}(0,0) = 0$ であり (iii) の場合であるが，この関数は $(0,0)$ で極小にも極大にもならない． □

例 2.6.8. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を調べよ．

$f_x = 3x^2 - 3y, f_y = 3y^2 - 3x$ であるから，臨界点は $(0,0),(1,1)$ となる．$f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, f_{yy} = 6y$ であるから，$H_f(x,y) = 36xy - 9$. $H_f(0,0) = -9 < 0$ であるから，$(0,0)$ は鞍点．$H_f(1,1) = 36-9 = 27 > 0$ であり，$f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ であるから，$(1,1)$ は極小点である．極小値は -1 となる．

2.7 陰関数定理

例えば，$F(x,y) = x^2+y^2-1$ とおくと $F(x,y) = 0$ をみたす (x,y) の全体は原点中心の半径 1 の円である．今，$F(x,y) = 0$ を y について解くと，$y = \sqrt{1-x^2}$ は一つの解である．しかし，$y'(\pm 1) = \mp\infty$ となり $x = \pm 1$ では微分可能ではない．しかし x について $x = \sqrt{1-y^2}$ とすると，これは $y = 0$ $(x = 1)$ で微分可能である．このように関係式 $F(x,y) = 0$ から $y = f(x)$ または，$x = g(y)$ の形の関数を求めることを考える．このとき，$y = f(x), x = g(y)$ を $F(x,y) = 0$ の陰関数という．

定理 2.7.1 (陰関数定理). *$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし，$F(x,y) \in C^1(D)$ は $(a,b) \in D$ で*

(i) $F(a,b) = 0$,

(ii) $F_y(a,b) \neq 0$

をみたすものとする． このとき，$x = a$ を含む開区間 I と I で定義された陰関数 $y = f(x)$ で，

(a) $b = f(a)$,

(b) $F(x, f(x)) = 0 \quad (x \in I)$

をみたすものがただ一つ存在する．さらに，$f \in C^1(I)$ であり，

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad (x \in I)$$

をみたす.

次の様に x, y の役割を取り替えたものも成立する.

定理 2.7.2 (陰関数定理). $D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とし，$F(x,y) \in C^1(D)$ は $(a,b) \in D$ で

(i) $F(a,b) = 0$,

(ii) $F_x(a,b) \neq 0$

をみたすものとする． このとき，$y = b$ を含む開区間 J と J で定義された陰関数 $x = g(y)$ で，

(a) $a = g(b)$,

(b) $F(g(y), y) = 0 \quad (y \in J)$

をみたすものがただ一つ存在する．さらに，$g \in C^1(J)$ であり，

$$g'(x) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)}, \quad (y \in J)$$

をみたす.

定理 2.7.1 の証明．$F_y(a,b) \neq 0$ であるから $F_y(a,b) > 0$ とする．（$F_y(a,b) < 0$ の場合も同様）．F_y は連続であるから，ある $r > 0$ があって，$(x,y) \in U := \{(x,y); (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ ならば，$F_y(x,y) > 0$ となる．このことから，$F(a,y)$ を y の関数とみて，狭義の単調増加関数である．$F(a,b) = 0$ より，$\varepsilon > 0$ が存在して，$F(a, b-\varepsilon) < 0 < F(a, b+\varepsilon)$ となる．$F(x,y)$ の連続性より，$\delta > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta$ ならば，$F(x, b-\varepsilon) < 0 < F(x, b+\varepsilon)$ となる．ここで必要ならば，$\varepsilon > 0$ と $\delta > 0$ を取り直して，

$$\{(x,y); |x-a| < \delta, |y-b| < \varepsilon\} \subset U$$

となるようにしておく．$I=(a-\delta,a+\delta)$ とおく．中間値の定理より任意の $x\in I$ に対して，$F(x,y)=0, b-\varepsilon<y<b+\varepsilon$ なる y が存在し，狭義単調性よりこの y はただ一つ決まる．この y を $y=f(x)$ と書けば $f(x)$ は I で定義され $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ の値をとり，$b=f(a), F(x,f(x))=0,\ (x\in I)$ をみたすただ一つの関数である．

$y=f(x)$ の連続性： 任意の $\alpha\in I$ をとり，$\beta=f(\alpha)$ とおく．上と同様に，任意の $\varepsilon'>0$ に対して，$\delta'>0$ が存在して，$|x-\alpha|<\delta'$ ならば，$|f(x)-\beta|<\varepsilon'$ となる．したがって，$y=f(x)$ は I で連続である．

$y=f(x)$ が C^1 関数であること： 平均値の定理より $\theta\in(0,1)$ が存在して，

$$F(x+h,y+k)-F(x,y)=hF_x(x+\theta h,y+\theta k)+kF_y(x+\theta h,y+\theta k).$$

ここで，$y=f(x), y+k=f(x+h)$ とおくと左辺は 0 となる．U で $F_y\neq 0$ であるから

$$\frac{k}{h}=-\frac{F_x(a+\theta h,y+\theta k)}{F_y(x+\theta h,y+\theta k)}.$$

F_x,F_y は連続で，$f(x)$ も連続だから，$h\to 0$ のとき，$k\to 0$ となり，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))},\quad (x\in I)$$

F_x,F_y が連続だから $f'(x)$ も連続．したがって，$f\in C^1(I)$ となる．

例 2.7.3. $F(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ において，$F_x=3(x^2-y), F_y=3(y^2-x)$ であるから，$F=F_x=F_y=0$ となる点は $(0,0)$．したがって陰関数定理より，$F(x,y)=0$ は原点以外で，局所的に $y=f(x)$ または $x=g(y)$ と表せる．

次に， $F_x=0$ より $y=x^2$ となる．これを $F(x,y)$ に代入して，$F(x,x^2)=x^3(x^3-2)=0$．これより，$(0,0),(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ でのみ，$F_x=0$ となるが，$F_y(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})\neq 0$ である．同様に，$(0,0),(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ でのみ，$F_y=0$ となるが，$F_x(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})\neq 0$ である．したがって，$F(x,y)=0$ は点 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ の近くでは，$y=f(x)$ と表現され， $(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ の近くでは，$x=g(y)$ と表現される．点 $(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ の近くでは，

$$(*)\qquad F_x(x,f(x))+F_y(x,f(x))f'(x)=0$$

であるから，

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

したがって，

$$f'(\sqrt[3]{2}) = -\frac{F_x(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})}{F_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})} = 0.$$

さらに，*(*)* を x で微分して，

$$F_{xx} + F_y f'' + (2F_{xy} + F_{yy} f') f' = 0$$

となる．これから，

$$f''(\sqrt[3]{2}) = -\frac{F_{xx}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})}{F_y(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})} = -\frac{6\sqrt[3]{2}}{3((\sqrt[3]{4})^2 - \sqrt[3]{2})} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = -2 < 0$$

が得られて，$y = f(x)$ は $x = \sqrt[3]{2}$ で極大となる．同様に，$(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ の近くで，$x = g(y)$ は $g'(\sqrt[3]{2}) = 0, g''(\sqrt[3]{2}) = -2 < 0$ となる．

第3章　重積分

この章では，2変数関数の重積分を扱う．

3.1　重積分と累次積分

$I = [a, b], J = [c, d]$ として，$K = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ の長方形という．$f(x, y)$ は K 上の連続関数とする．$|K| = (b-a)(d-c)$ を長方形 K の面積とする．

$\Delta_1; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,\quad \Delta_2 : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ と I, J をそれぞれ分割し，小長方形 $K_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $(i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m)$ を作りその面積を $|K_{ij}| = |I_i||J_j|$. ここで $|I_i| = x_i - x_{i-1}, |J_j| = y_j - y_{j-1}$ とする．$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 : K_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m)$ を K の分割と呼ぶ．

$|K| = \max_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m}\{K_{ij}$の対角線の長さ$\}$ とする．

K_{ij} の中に任意の点 (ξ_i, η_j) をとる．

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)|K_{ij}| \tag{3.1}$$

をリーマン和という．1変数のときと同様に次の定理が成り立つ．

定理 3.1.1. $f(x, y)$ を区間 K で連続とする．このとき，

$$S = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)|K_{ij}| \tag{3.2}$$

が存在する．正確には，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して，$|\Delta| < \delta$ をみたす分割 Δ に対して (ξ_i, η_j) の選び方には無関係に

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j)|K_{ij}| - S\right| < \varepsilon \tag{3.3}$$

となる．

定義 3.1.2. 上の定理で定まる S を

$$S = \iint_K f(x,y)dxdy$$

と書き，K における f の積分といい，K を積分範囲という．1変数における積分の性質（線形性，順序との関係，絶対値評価，区間における加法性等）はそのまま成り立つ．

定理 3.1.3 (重積分と累次積分). $f(x,y)$ を長方形区間 $K = I \times J$, $I = [a,b], J = [c,d]$ で連続とする．$y \in J$ を固定すると $f(x,y)$ は x の関数として連続であるから，$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ を考えることが出来る．このとき，$F(y)$ は J で連続で

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \int_c^d F(y)dy \tag{3.4}$$

が成り立つ．x, y の役割を交換しても同様である．

(3.4) は次の様にも書かれる．

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{3.5}$$

(3.5) の左辺を重積分，右辺を累次積分と呼ぶ．(3.5) の右辺での役割を交換してもよりから，

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \tag{3.6}$$

が成り立つ．(3.6) は積分順序の交換公式と言われる．

定理 3.1.3 の証明 $f(x,y)$ は有界閉区間 $K = I \times J$ で連続であるから，一様連続である．すなわち，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \sqrt{|x-x'|^2 + |y-y'|^2} < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

(i) $F(y)$ の連続性．
$|y - y'| < \delta$ のとき，

$$|F(y) - F(y')| \leq \int_a^b |f(x,y) - f(x,y')|dx < \varepsilon(b-a)$$

となり，明らかである．

(ii) 上の分割 Δ を考える．リーマン和 (3.1) で，$(\xi_i, \eta_j) = (x_i, y_j)$ と選び，以下を定義する．

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)|K_{ij}|, Z_F = \sum_{j=1}^{m} F(y_j)|J_j|, Z_j = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_j)|I_i|.$$

これらはそれぞれ

$$\iint_K f(x,y)dxdy, \int_c^d F(y)dy, F(y_j) = \int_a^b f(x, y_j)dx$$

のリーマン和である．明らかに，$Z = \sum_{j=1}^{m} Z_j|J_j|$ が成立する．$|\Delta| < \delta$ のとき，(3.7) から

$$\left| \iint_K f(x,y)dxdy - Z \right| < \varepsilon|K|, |F(y_j) - Z_j| < \varepsilon|I|.$$

$y \in J_j$ のとき，$|F(y) - F(y_j)| < \varepsilon|I|$ であるから，

$$\left| \int_c^d F(y)dy - Z_F \right| < \varepsilon|I||J| = \varepsilon|K|.$$

$$|Z_F - Z| = \left| Z_F - \sum_{j=1}^{m} Z_j|J_j| \right| \le \sum_{j=1}^{m} |F(y_j) - Z_j||J_j| < \varepsilon|K|.$$

したがって，

$$\left| \iint_K f(x,y)dxdy - \int_c^d F(y)dy \right| < 3\varepsilon|K|. \quad \square$$

例 3.1.4. $f(x,y) = g(x)h(y)$ のときは，

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \int_a^b g(x)dx \int_c^d h(y)dy$$

となる．実際，$F(y) = h(y)\int_a^b g(x)dx$ となる．

例 3.1.5. $K = \{(x,y); 0 \le x \le \sqrt{3}, 0 \le y \le 1\}$ として，

$$I = \iint_K \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2} dxdy$$

を求める．

(i) $\iint_K \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}dx\right)dy$ と考えて，先に x で積分する．$t=x^2$ とおき置換積分をする．

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}dx &= \int_0^3 \frac{\sqrt{t}}{(t+y^2+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{1}{(t+y^2+1)^2}dt\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t+y^2+1}\right]_0^3\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2+4}-\frac{1}{y^2+1}\right).\end{aligned}$$

1 変数の積分

$$\int \frac{1}{x^2+c}dx = \frac{1}{\sqrt{c}}\arctan\frac{x}{\sqrt{c}} + C \quad (c>0)$$

を思い出せ．

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{y^2+4}-\frac{1}{y^2+1}\right)dy\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2}-\arctan y\right]_0^1\\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\arctan(1/2).\end{aligned}$$

(ii) $\iint_K \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}dxdy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \frac{x}{(x^2+y^2+1)^2}dy\right)dx$ と考えて，先に y で積分する． もちろんこれでも出来るが結構大変である．

3.2　一般集合上の重積分

このセクションでは，次の形の集合上の積分を考える．

$G_1 = \{(x,y); \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), a \le x \le b\}$ または，

$G_2 = \{(x,y); \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\}$

の形の集合で内部が互いに交わらない有限個の集合の和集合を G とする（この形のものをこのテキストでは一般集合と呼ぶ）．ここで $\phi_1 \le$

$\phi_2, \psi_1 \leq \psi_2$ で，それぞれの関数は連続関数とする．このとき，次がいえる．

(a) K を長方形で $K \supset G$ となるように選ぶ．

(b) K 上の関数 $\widetilde{f}(x,y)$ を

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \in K \setminus G. \end{cases}$$

で定義する．

(c) K の分割 Δ を考え，$\widetilde{f}(x,y)$ のリーマン和

$$\Sigma(\widetilde{f}, \Delta, (\xi_i, \eta_j))$$

を作る．

(d) $S = \lim_{|\Delta| \to 0} \Sigma(\widetilde{f}, \Delta, (\xi_i, \eta_j))$ が存在することを示す．

このとき，S を

$$S = \iint_G f(x,y)dxdy$$

と書いて f の G 上での重積分と呼ぶ．

$G_1 = \{(x,y); \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), a \leq x \leq b\}$ のとき，次が成立する．

$$\iint_{G_1} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy.$$

$G_2 = \{(x,y); \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$ のとき，

$$\iint_{G_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

上の意味での一般集合上での積分はこれらの有限個の和として定義する．

例 3.2.1. $G = \{(x,y); a \leq x \leq y/2 \leq b\}$ とすると，$f(x,y)$ の G 上の重積分を累次積分で表すと，

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_{2a}^{2b} dy \int_a^{y/2} f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_{2x}^{2b} f(x,y)dy$$

となる．

例 3.2.2. G を第 1 象限にあり，円 $x^2+y^2=1, x^2+(y-1)^2=1$ および x 軸で囲まれた領域とする．このとき，$I=\iint_G xe^{x^2+y^2}dxdy$ を求めよ．K を

$$G=\{(x,y);(2y-y^2)^{1/2}\le x\le(1-y^2)^{1/2}, 0\le y\le 1/2\}$$

と見なして，先に x で積分する累次積分を考える．

$$\begin{aligned}\iint_G xe^{x^2+y^2}dxdy &= \int_0^{1/2}dy\int_{(2y-y^2)^{1/2}}^{(1-y^2)^{1/2}}xe^{x^2+y^2}dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left[e^{x^2+y^2}\right]_{x^2=2y-y^2}^{x^2=1-y^2}dy\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}(e-e^{2y})dy=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

この例では先に y で積分すると求めることは出来ない．

3.3 図形の面積

一般領域 G の面積 $|G|$ を

$$|G|=\iint_G 1dxdy$$

で定義する．

例 3.3.1. $G=\{(x,y);\phi(x)\le y\le\psi(x), a\le x\le b\}$ とすると，

$$|G|=\int_a^b(\psi(x)-\phi(x))dx.$$

境界がパラメータ表示されているときの面積計算

面積の定義から，G の境界が決まれば G の面積がわかるはずである．G が一般領域で，G の境界 C が

$$C:(x,y)=(x(t),y(t)),\quad t\in[\alpha,\beta]$$

のようにパラメータ表示されているとする．$[\alpha,\beta]$ 上の関数 $x=x(t)$ が $[\alpha,\beta]$ で連続であり，$[\alpha,\beta]$ で区分的に連続的微分可能であるとは，

(i) $f\in C([\alpha,\beta])$.

(ii) $[\alpha,\beta]$ の分割 $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = \beta$ が存在し，$f \in C^1([t_{k-1},t_k])$

が成り立つことをいう．関数 $x(t), y(t)$ は区分的に滑らかであるといい，C は区分的に滑らかな曲線であるという．さらに，始点と終点が一致するとき閉曲線といい，始点と終点以外では自分自身と交わらないとき，単純閉曲線であるという．

定理 3.3.2. G は区分的に滑らかな単純閉曲線 C の内部であるとする．G の境界 C は $C: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha,\beta]$ とパラメータ表示されているものとする．さらに，t が増加するとき，C は G を左手に見る方向に G 上を一周するものとする．このとき，

$$|G| = \int_\alpha^\beta x(t)y'(t)dt = -\int_\alpha^\beta x'(t)y(t)dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\}dt.$$

例 3.3.3. （楕円の面積） 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ に囲まれる領域 G の面積を計算する．楕円のパラメータ表示として，$x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t \quad t \in [0, 2\pi]$ を使う．

$$|G| = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t)dt = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t + 1}{2}dt = \pi ab.$$

3.4 広義積分

$K \subset \mathbb{R}^2$ を領域にその境界の一部を付け加えた集合とし，$f(x,y)$ は K で連続であるとする．一般領域 G で $G \subset K$ をみたすもの全体を $\mathcal{G}$ とする．$G \in \mathcal{G}$ のとき，$f(x,y)$ および $|f(x,y)|$ の G 上の積分は定義されて，$\iint_G |f(x,y)|dxdy \geq 0$ となる．$f(x,y)$ が

$$I := \sup_{G\in\mathcal{G}} \iint_G |f(x,y)|dxdy < \infty$$

をみたしているものとする．G_N を単調増大 $(G_1 \subset G_2 \subset \cdots)$ であり，任意の $G \in \mathcal{G}$ はある G_N に含まれるものとする．これを $\lim_{N\to\infty} G_N = K$ と書く．このとき，

$$\lim_{N\to\infty} \iint_{G_N} f(x,y)dxdy$$

は極限をもち，上の性質をもつ G_N の選び方によらない．このとき，K 上の広義積分が

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \lim_{N\to\infty}\iint_{G_N} f(x,y)dxdy$$

で定義される．

例 3.4.1. $f(x,y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^3}$ の $K = \{(x,y); x \geq 0, y \geq 0\}$ での積分を考える．$G_N = [0,N]\times[0,N]$ とおくと，$\lim_{N\to\infty} G_N = K$ となる．

$$\begin{aligned}\int_0^N\int_0^N f(x,y)dxdy &= \int_0^N ydy\int_0^N \frac{x}{(1+x^2+y^2)^3}dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^N \left(\frac{y}{(1+y^2)^2} - \frac{y}{(1+N^2+y^2)^2}\right)dy \\ &= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1+3N^2}{(1+N^2)(1+2N^2)}\right) \to \frac{1}{8} \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

したがって，

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)dxdy = \frac{1}{8}.$$

例 3.4.2. $(0,0),(1,0),(1,1)$ を頂点とする閉三角形から頂点 $(0,0)$ を除いた集合を K とする．$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$ の K 上の積分を考える．($(0,0)$ の近くでは有界ではない）．$G_N = \{(x,y)\in K; 1/N \leq x \leq 1\}$ とおくと，$\lim_{N\to\infty} G_N = K$ となる．

$$\begin{aligned}\iint_{G_N}\frac{1}{\sqrt{x+y}}dxdy &= \int_{1/N}^1 dx\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x+y}}dy \\ &= 2(\sqrt{2}-1)\int_{1/N}^1 \sqrt{x}dx \\ &= \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}(1-\frac{1}{N^{3/2}}) \to \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

したがって，

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}.$$

3.5　重積分の変数変換

G を一般領域とし，$f(x,y)$ を G 上の連続関数とする．別の一般領域 H から G への写像 $(x,y)=(\phi(u,v),\psi(u,v))$, $((u,v)\in H)$ が H から G への変数変換であるとは次の条件をみたすものとする．

(i) $\phi(u,v),\psi(u,v)$ は H を含む領域で定義されている C^1 級の 1 対 1 の関数で，$(u,v)\in H$ のとき $(\phi(u,v),\psi(u,v))\in G$ となるものとする．

(ii) H で $(x,y)=(\phi(u,v),\psi(u,v))$ のヤコビアン $J(u,v)$ がゼロにならない．すなわち，

$$J(u,v)=\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\phi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\phi}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}\neq 0,\quad (u,v)\in H.$$

(iii) 写像 $(u,v)\mapsto(\phi(u,v),\psi(u,v))$ は H を G の上に写す．

このとき，次の定理が成り立つ．

定理 3.5.1. 上の条件の下で，

$$\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_H f(\phi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|dudv.$$

例 3.5.2. G を 4 直線 $y=x\pm1, y=-x\pm1$ で囲まれる領域とし，$I=\iint_G(y^2-x^2)^2dxdy$ を求める．$u=x+y, v=x-y$ とおくと，$x=\frac{u+v}{2}, y=\frac{u-v}{2}$ となり，対応する (u,v) の領域は $H=\{(u,v);|u|\leq1,|v|\leq1\}$ となる．

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq0.$$

故に，

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(uv)^2\frac{1}{2}dudv=\frac{2}{9}.$$

例 3.5.3. 半径 a の円の面積 $S(a)$ および半径 a の球の体積 $V(a)$ を求める．

2 次元極座標 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\quad(r\geq0, 0\leq\theta<2\pi)$ のヤコビアンは $J(r,\theta)=r$ であり，

3 次元極座標 $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\theta\quad(r\geq0, 0<\theta<\pi, 0\leq\phi<2\pi)$ のヤコビアンは $J(r,\theta,\phi)=r^2\sin\theta$ であった．

$$S(a)=\iint_{x^2+y^2\leq a^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^a rdrd\theta=\int_0^a rdr\int_0^{2\pi}d\theta=\pi a^2.$$

$$
\begin{aligned}
V(a) &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} dxdydz \\
&= \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}
$$