解析学 III 小テスト No. 1

［1］ $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，

(i) シュワルツの不等式

$$|(x, y)| \leq |x||y|$$

を証明せよ．

(ii) 三角不等式

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

を証明せよ．

(iii) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ について，

$$|x_i| \leq |x| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

を証明せよ．

解析学 III 小テスト No. １ 解答例

［１］ (i) $x = 0(= (0, \ldots, 0))$ のときは明らかであるので，$x \neq 0$ とする．任意の実数 t に対して，

$$0 \leq |tx + y|^2 = t^2|x|^2 + 2t(x, y) + |y|^2$$

であるから，t に関する 2 次不等式となる．判別式を D とすると，$D/4 \leq 0$ となる．すなわち，

$$|(x, y)|^2 \leq |x|^2|y|^2.$$

これより，両辺の平方根をとれば，求める不等式が得られる．

(ii)

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2$$

であるから，シュワルツの不等式より，

$$|x + y|^2 = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

これより，両辺の平方根をとれば，求める不等式が得られる．

(iii) $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2} \geq |x_i|$ は明らかである．一方，$|x_i| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ $(i = 1, \ldots, n)$ であるから，

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq n \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right)^2$$

両辺の平方根をとれば，求める右側の不等式が得られる．

解析学 III 小テスト No. 2

［１］ 次の関数 $f(x,y)$ について

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\}, \lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\}$$

を求めよ．

(i)

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

(ii)

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}.$$

解析学 I 小テスト No. 2 解答例

［1］(i) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおくと，$(x,y) \to (0,0)$ のとき，$x^2+y^2 = r^2 \to 0$.

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \cos^2\theta$$

であるから，その極限値は θ の値により異なる．したがって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right\} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

(ii) $y = mx$ に沿って $(0,0)$ に近づくと

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = \frac{x^2(1+m^2)}{x^2\sqrt{1+m^4}} = \frac{1+m^2}{\sqrt{1+m^4}}$$

であるから，極限値は m の値によって異なる．したがって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない．

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{\sqrt{y^4}} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}\right\} = \lim_{y\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{x^4}} = 1.$$

解析学 III 小テスト No. ３

［１］ 次の２変数関数 $f(x,y)$ の (a,b) における各変数に関する偏微分係数を求めよ．

$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}, \quad (a,b) = (2,3).$

［２］ 次の多変数関数のそれぞれの変数に関する偏導関数を求めよ．

$f(x,y,z) = \sin^{-1}(xyz).$

解析学 **III** 小テスト **No.** ３の解答例

［１］ $f_x(2,3) = -4/169, f_y(2,3) = -6/169.$

［２］ $f_x(x,y,z) = \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, f_y(x,y,z) = \frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, f_z(x,y,z) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}.$

解析学 III 小テスト No. ４

［１］ ２変数関数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ の点 $(1,2)$ ベクトル $\boldsymbol{u} = (3/5, -4/5)$ 方向の方向微分係数を求めよ.

［２］ ３変数関数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3$ の点 $(1,2,-1)$ におけるベクトル $\boldsymbol{u} = (2/3, -2/3, 1/3)$ 方向への方向微分係数を求めよ.

解析学 III 小テスト No. ４の解答例

［１］ $\nabla f = (2x-2y, 2y-2x)$ であるから，$D_{\boldsymbol{u}} f(1,2) = (3/5, -4/5) \cdot (-2, 2) = -6/5 - 8/5 = -14/5.$

［２］ $\nabla f = (2x, 2y, 3z^2)$ であるから，

$$D_{\boldsymbol{u}} f(1,2,-1) = (2,4,3) \cdot (2/3, -2/3, 1/3) = (4-8+3)/3 = -1/3.$$

解析学 III 小テスト No. ５

［１］ $z = e^x \cos y, x = t^2, y = 3\sin t$ について，$\frac{dz}{dt}$ を求めよ．

［２］ $z = x^2 + y^2, x = \cos(t+s), y = \sin(t-s)$ について，$\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial s}$ を求めよ．

解析学 **III** 小テスト **No.** ５の解答例

［1］

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= e^x \cos y(2t) - e^x \sin y(3\cos t) \\
&= e^{t^2}[2t\cos(3\sin t) - \{\sin(3\sin t)\}3\cos t].
\end{aligned}
$$

［2］

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\
&= -2x\sin(t+s) + 2y\cos(t-s) \\
&= -2\sin(t+s)\cos(t+s) + 2\sin(t-s)\cos(t-s) \\
&= -2\cos 2t \sin 2s.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\
&= -2x\sin(t+s) - 2y\cos(t-s) \\
&= -2\sin(t+s)\cos(t+s) - 2\sin(t-s)\cos(t-s) \\
&= -2\sin 2t \cos 2s.
\end{aligned}
$$

解析学 III 小テスト No. 6

［１］ 次の２変数関数について，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$$

を求めよ．

(i) $f(x,y)=x^2+y^2$.

(ii) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$.

解析学 III 小テスト No. ６の解答例

［１］ (i)

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2hk\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)+k^2\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y)\\ &= h^2(2)+2hk(0)+k^2(2)=2(h^2+k^2).\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2hk\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y)+k^2\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y)\\ &= h^2\frac{(-2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}+2hk\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}+k^2\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

解析学 III 小テスト No. 7

［1］　2変数関数 $f(x,y) = e^x \cos y$ を点 $(0,0)$ について，2次のテイラー多項式 P_2 とその剰余項 R を求めよ．

解析学 III 小テスト No. 7の解答例

［1］$P_2 = f(0,0)+\{xf_x(0,0)+yf_y(0,0)\}+\frac{1}{2!}\{x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)\}$ でその剰余項は

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{3!}\left\{x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right\}^3 f(\theta x,\theta y) \\ &= \frac{1}{6}(x^3f_{xxx}(\theta x,\theta y)+3x^2yf_{xxy}(\theta x,\theta y)+3xy^2f_{xyy}(\theta x,\theta y) \\ &\quad +y^3f_{yyy}(\theta x,\theta y)) \quad (0<\theta<1) \end{aligned}$$

であるから，

$$p_2 = 1+x+\frac{1}{2}(x^2-y^2).\ R = \tfrac{1}{6}(x^3e^{\theta x}\cos\theta y)+3x^2y(-e^{\theta x}\sin\theta y) \\ +3xy^2(-e^{\theta x}\cos\theta y)+y^3(e^{\theta x}\sin\theta y)).$$

解析学 III 小テスト No. ８

［１］ ２変数関数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y+2$ の極小点，極大点，鞍点を求めよ．また，最大値，最小値が存在するときはそれらも求めよ．

解析学 III 小テスト No. ８の解答例

［１］$f_x = 2x + y - 1 = 0, f_y = x + 2y - 1 = 0$ を解くと，$x = y = 1/3$. $f_{xx} = 2, f_{xy} = 1, f_{yy} = 2$ だから，

$$H_f(1/3, 1/3) = f_{xx}(1/3, 1/3)f_{yy}(1/3, 1/3) - f_{xy}(1/3, 1/3)^2 = 3 > 0.$$

$f_{xx}(1/3, 1/3) > 0$ より，$(x, y) = (1/3, 1/3)$ で極小．唯一の極小であるから，最小である．最小値は $f(1/3, 1/3) = 5/3$.

解析学 III 小テスト No. ９

［１］ y が x の関数であり，$F(x,y)=xy^2-x^2y-16=0$ をみたすとき，y の極値を求めよ．

解析学 III 小テスト No. ９の解答例

［１］ $y = f(x)$ と書けたとすると，$F(x, f(x)) = 0$ を x で微分して，$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0$. $f'(x) = 0$ となるとき，$F_x(x, f(x)) = 0$ となるので，$F_x = y^2 - 2xy = 0$ と $xy^2 - x^2y - 16 = 0$ を解いて，$(x, y) = (2, 4)$ となる．$F_y = 2xy - x^2$ より，$F_y(2, 4) = 16 - 2^2 \neq 0$ なので，確かに $(x, y) = (2, 4)$ の近くでは，$y = f(x)$ と書け，$f'(2) = 0$ となる．このとき，$f''(2) = -F_{xx}(2, 4)/F_y(2, 4) = 8/12 = 2/3 > 0$ であるから，$y = f(x)$ は $x = 2$ で極小値 4 をとる．

解析学 III 小テスト No. １０

［１］ $K = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ のとき,

$$I = \iint_K (x^2 + 2xy + 3y^2)dxdy$$

を求めよ.

解析学 III 小テスト No. １０の解答例

［１］ 先に x で積分する.（y で先に積分しても手間はさほど変わらない）.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \left(\int_0^1 (x^2 + 2xy + y^2) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + x^2 y + 3xy^2 \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{3} + y + 3y^2) dy \\
&= \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

解析学 III 小テスト No. １１

［１］ $G = \{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \pi\}$ のとき，

$$I = \iint_G (\sin x + y)\,dxdy$$

を求めよ．

解析学 III 小テスト No. １１の解答例

［１］ $G = \{(x,y); 0 \le x \le \pi - y, 0 \le y \le \pi\}$ と表し，先に x で積分する．

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi - y} (\sin x + y) dx \\
&= \int_0^{\pi} \left[-\cos x + xy \right]_{x=0}^{x=\pi-y} dy \\
&= \int_0^{\pi} (\cos y + 1 + \pi y - y^2) dy \\
&= \pi + \frac{\pi^3}{6}.
\end{aligned}
$$

解析学 III 小テスト No. １２

［１］ $(0,0),(1,0),(1,1)$ を頂点とする閉三角形から頂点 $(0,0)$ を除いた集合を K とする．$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+y}}$ の K 上の積分を求めよ．（$(0,0)$ の近くでは有界ではない）．

解析学 III 小テスト No. １２ の解答例

［１］ $G_N = \{(x,y) \in K; 1/N \le x \le 1\}$ とおくと，$\lim_{N\to\infty} G_N = K$ となる.

$$
\begin{aligned}
\iint_{G_N} \frac{1}{x+y} dxdy &= \int_{1/N}^{1} dx \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x+y}} dy \\
&= 2(\sqrt{2}-1) \int_{1/N}^{1} \sqrt{x} dx \\
&= \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}(1 - \frac{1}{N^{3/2}}) \to \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} \quad (N \to \infty).
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\iint_K f(x,y) dxdy = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}.
$$

解析学 III 小テスト No. １３

［１］ $G = \{(x, y); |x + y| \leq 1, |x - y| \leq 1\}$ のとき，重積分

$$\iint_G (x^2 + y^2) dxdy$$

を求めよ．

解析学 III 小テスト No. １３ の解答例

［１］ $u = x + y, v = x - y$ とおくと，$J(u, v) = -1/2$ となる．対応する領域 H は $H = \{(u, v); |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$ となる．

$$\begin{aligned}
\iint_G (x^2 + y^2) dxdy &= \iint_H \left(\left(\frac{u+v}{2} \right)^2 + \left(\frac{u-v}{2} \right)^2 \right) \left| -\frac{1}{2} \right| dudv \\
&= \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (u^2 + v^2) du \right) dv \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$