解析学 I 小テスト No. 1

［1］(i) $1 \leq 1$ は正しいか.
(ii) $0 < 1$ を示せ.

［2］次の文章を論理記号 $\forall, \exists$ を使って表せ.
(i) $x \in \mathbb{R}$ について，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$|x| < \varepsilon$ が成立する.
(ii) 任意の 2 つの実数 $a < b$ に対して，$a < x < b$ となる実数が存在する.

［3］(i) ［2］の (i) が成立するとき，$x = 0$ を証明せよ.
(ii) ［2］の (ii) は正しいか.

解析学 I 小テスト No. １ 解答例

［１］(i) $1 \leq 1$ は正しい．なぜならば，$1 \leq 1$ は $1 = 1$ または $1 < 1$ を意味するのだから．
(ii) $0 < 1$ を否定すると，$0 \geq 1$ となるが，実数の公理（１）(1.7) から $0 \neq 1$ であるから，$0 > 1$ となる．両辺に -1 を加えて，$-1 = -1 + 0 > -1 + 1 = 0$. すなわち，$-1 > 0$.
$1 = (-1) \cdot (-1)$ となる．
実際，まず，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x \cdot 0 = 0$ である．なぜならば，$x \cdot \{1 + (-1)\} = x + x \cdot (-1) = x - x = 0$.
　$1 + (-1) = 0$ だから，両辺に (-1) をかけて，分配法則を使うと，

$$0 = (-1) \cdot 0 = (-1)\{1 + (-1)\} = (-1) \cdot 1 + (-1)(-1).$$

$(-1) \cdot 1 = -1$ であるから，$-1 + (-1)(-1) = 0$. したがって，両辺 1 にを加えて，$(-1)(-1) = 1$. $-1 > 0$ と仮定しているから，$1 = (-1)(-1) \geq 0$. これは，$1 < 0$ としたことに矛盾する．

［２］(i) $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon$.
(ii) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b, \exists x \in \mathbb{R} : a < x < b$.

［３］(i) $x = 0$ を否定すると，$x \neq 0$. したがって，$|x| > 0$. $\varepsilon = |x|$ ととり,［２］(i) を適用すると，$|x| < |x|$. これは矛盾である．
(ii) ［２］の (ii) は正しい．なぜならば，任意の $a < b$ に対して，$x = (a + b)/2$ とおけば，$a < x < b$ となる．

解析学 I 小テスト No. 2

［１］次の集合 (i) ∼ (v) は上に有界か，下に有界か．また，最大元，最小元は存在するか．さらに上限，下限を求めよ．(例にしたがって考えよ．)
例：$M = [3, 8)$.
たとえば 9 をとると $\forall x \in M, x \leq 9$ となり，9 は M の上界であるから，M は上に有界．
たとえば 0 をとると $\forall x \in M, x \geq 0$ となり，0 は M の下界であるから，M は下に有界．
$\forall x \in M, 3 \leq x, \quad 3 \in M$ であるから，$\min M = 3$.
M に最大元 $a = \max M$ が存在したとすると，$a \in M$. $3 \leq a < 8$ より，$c = \frac{a+8}{2}$ とおくと，$3 \leq a < c < 8$ となる．したがって $c \in M$，一方 $a < c$ より $a = \max M$ に矛盾する．したがって，M に最大元は存在しない．
M の最小元は存在し，$3 = \min M$ であるから，$\inf M = \min M = 3$.
M の上界の集合は $[8, \infty)$ となる．この集合の最小元は 8 である．なぜならば，$\forall x, \in [8, \infty), 8 \leq x$ であり，$8 \in [8, \infty)$ であるから．したがって，$\sup M = 8$.

(i) $M = [2, 3)$.
(ii) $M = (1, 2) \cup [3, 4)$.
(iii) $M = (1, \infty)$.
(iv) $M = \{\frac{1}{n}; n = 1, 2, \ldots\}$.
(v) $M = \{n; n = 1, 2, \ldots\}$.

解析学 I 小テスト No. 2 解答例

(i) これは，例と全く同様に行えばよい．上にも下にも有界．$\max M$ は存在しない．$\min M = 2, \sup M = 3, \inf M = 2$.
(ii) $0 \le x, \forall x \in M$, $4 \ge x, \forall x \in M$ より，M は下に有界，かつ上に有界．最大元，最小元はともに存在しない．
M の下界の集合は $(-\infty, 1]$ であり，その最大元は 1 であるから，$\inf M = 1$.
M の上界の集合は $[4, \infty)$ であり，その最小元は 4 であるから，$\sup M = 4$.
(iii) $1 \le x, \forall x \in M$ であるから，下に有界．$x \le a, \forall x \in M$ となるような実数は存在しないので，M は上に有界ではない．
最小元は存在しない．最大元も存在しない．
M の下界の集合は $(-\infty, 1]$ であり，その最大元は 1 であるから，$\inf M = 1$.
M は上に有界ではないから，$\sup M = +\infty$.
(iv) $0 \le \frac{1}{n}, \forall n = 1, 2, \ldots$ であるから，M は下に有界．
$\frac{1}{n} \le 1, \forall n = 1, 2, \ldots$ であるから，M は上に有界．
$\forall n = 1, 2, \ldots, \frac{1}{n} \le 1, \quad 1 = \frac{1}{1} \in M$ より，$\max M = 1$.
最小元が存在しないことは，もし，存在したとすると，それは M に属するから，$\min M = \frac{1}{n_0}$ (n_0 は自然数) の形をしている．$n_0 + 1$ はまた自然数であり，$\frac{1}{n_0+1} \in M$ である．$\frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0}$ となり，$\min M = \frac{1}{n_0}$ に矛盾する．
最大元は存在し，$\max M = 1$ となる．
M の下界の集合は $(-\infty, 0]$ であり，その最大元は 0 であるから，$\inf M = 0$.
M の上界の集合は $[1, \infty)$ であり，その最小元は 1 であるから，$\sup M = 1$.
(v) M は上に有界ではない．$1 \le n, \forall n = 1, 2, \ldots$ であるから，下に有界．
$\max M$ は存在しない．$\min M = 1$.
$\sup M = \infty$, $\inf M = \min M = 1$.

解析学 I 小テスト No. ３

［１］極限の定義から，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n}.$$

［２］数列が収束するとき，その極限値は一意的に決まることを示せ．

［３］極限の定義から数列 $a_n=(-1)^n$ は収束しないことを示せ．（ヒント：収束するとして矛盾を示す）．

解析学 I 小テスト No. ３ 解答例

［１］極限値は $-2/3$ であることを予想する．

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n-1}{2-3n}-\frac{-2}{3}\right| &= \left|\frac{6n-3+4-6n}{3(2-3n)}\right| \\ &= \frac{1}{3(3n-2)}.\end{aligned}$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，自然数 N を

$$\frac{1}{3(3N-2)} < \varepsilon$$

となるように選べる．たとえば，$N = [\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{2}{3}]+1$ とするとよい． このとき，$N > \frac{1}{9\varepsilon}+\frac{2}{3}$. したがって，$n \geq N$ のとき，

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n-1}{2-3n}-\frac{-2}{3}\right| &= \frac{1}{3(3n-2)} \\ &\leq \frac{1}{3(3N-2)} < \varepsilon.\end{aligned}$$

［２］いま，数列 $\{a_n\}$ が２つの極限値 a, b をもったとする．極限の定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N_1 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq N_1$ のとき，$|a_n - a| < \varepsilon/2$ となる．同様に，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq N_2$ のとき，$|a_n - b| < \varepsilon/2$ となる．$n \geq \max(N_1, N_2)$ のとき，

$$0 \leq |a-b| \leq |a-a_n+a_n-b| \leq |a_n-a|+|a_n-b| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意だから，$a = b$ を得る．

［３］いま，$\{a_n = (-1)^n\}$ が収束するとして，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする．このとき，極限値の一意性 ［２］から，$a \neq 1$ または， $a \neq -1$.
$a \neq 1$ のとき，$\varepsilon = |a-1|$ とおくと，$\varepsilon > 0$ となるので，極限値の定義から，$N_1 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq N_1$ のとき，$|a_n - a| < \varepsilon$ となる．しかし，$n \geq N_1$ であり，$a_n = 1$ となる n は存在する．すると，この n に対して，

$$|a_n - a| = |1-a| < \varepsilon = |a-1|$$

となり，矛盾する．$a \neq -1$ のときも，$\varepsilon = |a+1|$ ととれば同様に示せる．

解析学 I 小テスト No. 4

［1］次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$$

［2］次の数列

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \quad (a > 0)$$

について，

(i) ある項から先は単調減少数列になっていることを示せ．

(ii) 極限値が存在することを示し，その極限値を求めよ．

解析学 I 小テスト No. 4 解答例

［1］$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ とおくと，$a_n \geq 0$. 両辺を n 乗して，二項展開すると，

$$\begin{array}{rcl} n &=& (1+a_n)^n \\ &=& 1 + na_n + \dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \cdots + a_n^n \\ &>& \dfrac{n(n-1)}{2}a_n^2 \end{array}$$

だから，$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. したがって，$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1+a_n) = 1$.

［2］(i) $a_n = \frac{a^n}{n!} \geq a_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$ となるためには，$1 \geq \frac{a}{n+1}$ となることが必要．逆に，このとき，すなわち，$n+1 \geq a$ ならば，$a_n \geq a_{n+1}$ となる．したがって，$a \leq n_0 + 1$ となる自然数をとれば，$n \geq n_0$ のとき $a_n \geq a_{n+1}$ となり，単調減少となる．

(ii) $a_n \geq 0$ であるから，$\{a_n\}$ は下に有界．したがって，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ が存在する．$a_{n+1} = \frac{a}{n+1}a_n$ より，$n \to \infty$ とすると，$b = 0 \cdot b = 0$ となる．

解析学 I 小テスト No. 5

［1］ 次を示せ.

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=e.$

(iii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\sqrt{e}.$

解析学 I 小テスト No. ５ 解答例

［１］ (i)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e.$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Big/\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=e.$$

(iii)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2}=\sqrt{e}.$$

解析学 I 小テスト No. 6

［1］ 数列 $\{a_n\}$ は次のように与えられたものとする．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

このとき，次に答えよ．

(i) $\{a_n\}$ がコーシー列であることを示せ．

(ii) 極限値を求めよ．

解析学 I 小テスト No. 6 解答例

［1］(i) $a_n \geq 1$ となる.（厳密には数学的帰納法を使う）

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| \frac{1}{a_n + 1} - \frac{1}{a_{n-1} + 1} \right| \\ &= \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(a_n + 1)(a_{n-1} + 1)} \\ &\leq \frac{1}{4} |a_n - a_{n-1}|. \end{aligned}$$

したがって，$0 \leq 1/4 < 1$ であるから授業の例でやったようにこの数列はコーシー列である.
(ii) コーシー列は収束するので，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とおく．$a_n \geq 1$ より，$a \geq 1$ に注意する.

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n + 1}$$

の両辺で，$n \to \infty$ とすると，$a = 1 + \frac{1}{a+1}$．これを解いて，$a \geq 1$ であるから，$a = \sqrt{2}$. したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

解析学 I 小テスト No. 7

［１］次の関数 $f(x) = x^2$ の極限値計算

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

が正しいことを定義により調べるためには,
　［任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$0 < |x| < \delta$ のとき，$|f(x) - 0| < \varepsilon$ となる.］
　を示さなければならない．与えられた任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ をどうとればよいか.
　［２］次の関数について

$$\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

が成立することを定義に基づいて示せ.（［１］のように行う）.

解析学 I 小テスト No. 7 解答例

［1］ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \sqrt{\varepsilon}$ とおくと，$0 < |x-0| < \delta$ のとき，

$$|f(x) - 0| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

となるので，$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

［2］ $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1 \quad (x \neq 0)$ だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ とおくと，$0 < |x| < \delta$ のとき，

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \delta = \varepsilon$$

となるので，

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

解析学 I 小テスト No. 8

［1］ 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるとし，実数 η に対して，$f(a) < \eta$ をみたすものとする．このとき，$\delta > 0$ が存在して，$|x - a| < \delta$ であれば $f(x) < \eta$ となることを示せ．

解析学 I 小テスト No. ８ 解答例

［１］$F(x) = f(x) - \eta$ とおくと，この関数はもちろん $x = a$ で連続であり，$F(a) = f(a) - \eta < 0$ をみたす．定理 2.2.5 から $\delta > 0$ が存在し，$|x - a| < \delta$ ならば $F(x)$ と $F(a)$ は同符号，すなわち，$F(x) < 0$ となる．このことは，$f(x) < \eta$ を意味する．

解析学 I 小テスト No. ９

［１］$f(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ で連続で，f の値域 $R(f) = \{f(x); x \in [a, b]\}$ が $R(f) \subset [a, b]$ をみたすものとする．このとき，$x \in [a, b]$ で $f(x) = x$ となるものが存在することを示せ．

解析学 I 小テスト No. ９解答例

［１］仮定は任意の $x \in [a,b]$ に対して，$a \leq f(x) \leq b$ を意味する．
$F(x) = f(x) - x$ とおくと，F は $[a,b]$ で連続である．仮定から，$F(a) = f(a) - a \geq 0$, $F(b) = f(b) - b \leq 0$ をみたす．
$F(a) = 0$ のときは，$f(a) = a$ であるから，a が求めるものである．
$F(b) = 0$ のときは，$f(b) = b$ であるから，b が求めるものである．
$F(a) > 0, F(b) < 0$ のときは，$F(a) > 0 > F(b)$ であるから，中間値の定理より，$x \in (a,b)$ で $F(x) = 0$ をみたすものがある．すなわち，$f(x) = x$.

解析学 I 小テスト No. １０

［１］$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を証明せよ.（ただし，ロピタルの定理はまだ証明していない）.

ヒント：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を用い，対数関数が連続であることから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

を導く．あとは，x に対して，自然数 n を $n\leq x<n+1$ となるように選び，

$$\frac{\log n}{n+1}<\frac{\log x}{x}<\frac{\log(n+1)}{n}$$

から，はさみうちを使う.

解析学 I 小テスト No. １０ 解答例

［１］$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を用い，対数関数が連続であることから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=\log 1=0.$$

x に対して，自然数 n を $n\leq x<n+1$ となるように選び，$x\to\infty$ のとき，$n\to\infty$.

$$\frac{\log n}{n+1}<\frac{\log x}{x}<\frac{\log(n+1)}{n}$$

から，

$$\frac{\log n}{n}\frac{n}{n+1}<\frac{\log x}{x}<\frac{\log(n+1)}{n+1}\frac{n+1}{n}.$$

はさみうちを使えばよい.

解析学 I 小テスト No. １１

［１］逆三角関数について，次の値を求めよ．

(i) $\mathrm{Sin}^{-1}(1)$.

(ii) $\mathrm{Cos}^{-1}(1)$.

(iii) $\mathrm{Tan}^{-1}(1)$.

ヒント：

$$\mathrm{Sin}^{-1}(1) = y \Longleftrightarrow 1 = \sin y, \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

より，$y = \pi/2$.

解析学 I 小テスト No. １１ 解答例

［１］(i) $\mathrm{Sin}^{-1}(1) = \pi/2$.
(ii) $\mathrm{Cos}^{-1}(1) = 0$.
(iii) $\mathrm{Tan}^{-1}(1) = \pi/4$.

解析学 I 小テスト No. １２

［１］ 関数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ は $\mathbb{R}$ で一様連続であることを示せ.

ヒント：$|f(x) - f(x')|$ を計算すると，

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= \frac{|x - x'||x + x'|}{(x^2+1)((x')^2+1)} \\ &\leq |x - x'| \left(\frac{|x|}{(x^2+1)((x')^2+1)} + \frac{|x'|}{(x^2+1)((x')^2+1)} \right). \end{aligned}$$

ここで，$\frac{|x|}{(x^2+1)} \leq 1/2$ に注意して，$|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$ を導く．そうすれば任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ とすれば $|x - x'| < \delta$ のとき，$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ となることは明らかであろう.

解析学 I 小テスト No. １２ 解答例

［１］まず，$x^2 - 2|x| + 1 = (|x| - 1)^2 \geq 0$ から，

$$|x| \leq \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

を得る．この不等式を使って，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ とおくと，$|x - x'| < \delta$ のとき，

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(x')| &= \frac{|x - x'||x + x'|}{(x^2 + 1)((x')^2 + 1)} \\
&\leq |x - x'| \left(\frac{|x|}{(x^2 + 1)((x')^2 + 1)} + \frac{|x'|}{(x^2 + 1)((x')^2 + 1)} \right) \\
&\leq |x - x'|(1/2 + 1/2) \\
&= |x - x'| < \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

解析学 I 小テスト No. １３

［１］ $\sin^2 x$ は $\mathbb{R}$ で一様連続であるが，$\sin x^2$ は $\mathbb{R}$ で一様連続ではないことを示せ.

解析学 I 小テスト No. １３ 解答例

［１］ $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned}|\sin^2 x - \sin^2 y| &= \frac{|\cos 2x - \cos 2y|}{2} \\ &= |\sin(x+y)\sin(x-y)| \le |\sin x - \sin y| \le |x-y|.\end{aligned}$$

したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ とおけば，$|x-y| < \delta$ のとき，$|\sin^2 x - \sin^2 y| \le |x-y| < \delta = \varepsilon$ となるの $\mathbb{R}$ で一様連続である．

次に，$x_n = \sqrt{2n\pi}, x'_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2}$ とおくと，$f(x) = \sin x^2$ は $f(x_n) = 0, f(x'_n) = 1$ をみたす．

$$x'_n - x_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2} - \sqrt{2n\pi} = \frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi + \pi/2} + \sqrt{2n\pi}} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

であるから，$f(x) = \sin x^2$ は $\mathbb{R}$ で一様連続ではない．