関数解析学Ｉ 演習問題 No. ０

［１］次のシュワルツの不等式を証明せよ.

$$|(x,y)| \leq |x||y|, \forall x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

関数解析学 I 演習問題 No. 0 解答例

任意の実数 t に対して，

$$
\begin{aligned}
0 \le (x+ty, x+ty) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i+ty_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\{x_i^2 + 2tx_iy_i + t^2y_i^2\} \\
&= |x|^2 + 2t(x,y) + t^2|y|^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

であることに注意する．$|y|=0$ のときは，$y_1=\cdots=y_n=0$ であるから， 不等式は明らかになりたつ．$|y|\neq 0$ とすると (1) は 2 次不等式となり，判別式は負または 0 すなわち，

$$(x,y)^2 - |x|^2|y|^2 \le 0.$$

したがって，

$$(x,y)^2 \le |x|^2|y|^2.$$

両辺の平方根をとると求める不等式を得る．

関数解析学 I　演習問題 No. 1

［１］K 上のベクトル空間 X の要素 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ に対して，$x_1, x_2, \ldots, x_m$ で張られる部分空間を $[x_1, x_2, \ldots, x_m]$ と書く．すなわち，

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_m : \alpha_i \in K,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

と書く．いま，$\dim X = n$ とすると，適当な n 個の要素 $e_1, e_2, \ldots, e_n \in X$ が存在して，

$$X = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$$

と書けることを証明せよ．

関数解析学 I　演習問題 No. 1 解答例

［ 1 ］$\dim X = n$ より，n 個の一次独立な要素 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ が存在する．任意の $x \in X$ に対して，$x, e_1, e_2, \ldots, e_n$ は一次従属だから，

(1) $\exists(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq (0, 0, 0, \ldots, 0) : \alpha_0 x + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0.$

このとき，$\alpha_0 = 0$ とすると，

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$$

となり，$e_1, \ldots, e_n$ の一次独立性から，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ となり，矛盾．したがって，$\alpha_0 \neq 0$ となる．故に，(1) から

$$x = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0} e_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0} e_n$$

と書ける．すなわち，

$$X = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$$

である．

関数解析学 I 演習問題 No. 2

［1］ ノルム空間の元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

が成立することを示せ.（ヒント：数学的帰納法）

関数解析学 I 演習問題 No. 2 解答

［1］ $n = 1$ のときは，明らかに成立する．$n = k$ のとき，成立すると仮定する．このとき，

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} x_j\Big\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|$$

となる．$n = k + 1$ のとき，$y = \sum_{j=1}^{k} x_j$ と考えると，

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=1}^{k+1} x_j\Big\| &\leq \Big\|(\sum_{j=1}^{k} x_j) + x_{k+1}\Big\| \\
&= \|y + x_{k+1}\| \\
&\leq \|y\| + \|x_{k+1}\| \qquad \text{（三角不等式）} \\
&\leq \Big\|\sum_{j=1}^{k} x_j\Big\| + \|x_{k+1}\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \|x_j\| + \|x_{k+1}\| \qquad \text{（帰納法の仮定）} \\
&\leq \sum_{j=1}^{k+1} \|x_j\|.
\end{aligned}$$

関数解析学 I　演習問題 No. 3

［1］$1 < p \leq \infty$ とする．$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合として，Ω の体積が有限（$|\Omega| < \infty$ と書く）ならば，次の包含関係が成り立つことを証明せよ．

$$L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

（ヒント：$\int_\Omega |f(x)|dx < \infty$ を示せばよい．$1 < p < \infty$ のときは，$f \in L^p(\Omega)$ として，$|f(x)| = |f(x)| \cdot 1$ と考えて，ヘルダーの不等式を使う．$p = \infty$ のときは，$L^\infty(\Omega)$ の定義と Ω の体積が有限とからでる．

関数解析学 I 演習問題 No. ３ 解答例

［１］$f \in L^p(\Omega)$ とする．$1 < p < \infty$ のとき，ヒントより，ヘルダーの不等式から，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となる q を選び，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|dx &\le \left\{\int_\Omega |f(x)|^p dx\right\}^{1/p}\left\{\int_\Omega 1^q dx\right\}^{1/q} \\ &= |\Omega|^{1/q}\left\{\int_\Omega |f(x)|^p dx\right\}^{1/p} < \infty.\end{aligned}$$

$p = \infty$ のとき，

$$\int_\Omega |f(x)|dx \le |\Omega| \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

関数解析学 I 演習問題 No. 4

［1］バナッハ空間 X, Y の直積空間 $X \times Y$ は，ノルム

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

（ただし，$\|x\|_X, \|y\|_Y$ は各々の X, Y ノルム）によって，バナッハ空間となることを次の手順で示せ.

(i) $X \times Y$ はノルム空間であることを示す.

(ii) 上のノルムに関して完備であることを示す.

関数解析学 I 演習問題 No. 4 解答例

［ 1 ］(i) (1) $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0$.
(2) $\|(x,y)\| = 0 \Longleftrightarrow \|x\|_X = 0, \|y\|_Y = 0 \Longleftrightarrow x = 0, y = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$.
(3) $\|\alpha(x,y)\| = \|(\alpha x, \alpha y)\| = \|\alpha x\|_X + \|\alpha y\|_Y = |\alpha|\|x\|_X + |\alpha|\|y\|_Y = |\alpha|(\|x\|_X + \|y\|_Y) = |\alpha|\|(x,y)\|$.
(4) $\|(x,y)+(x',y')\| = \|(x+x', y+y')\| = \|x+x'\|_X + \|y+y'\|_Y \leq \|x\|_X + \|x'\|_X + \|y\|_Y + \|y'\|_Y = \|x\|_X + \|y\|_Y + \|x'\|_X + \|y'\|_Y = \|(x,y)\| + \|(x',y')\|$.

(ii) $\{(x_n, y_n)\}$ をコーシー列とする．このとき，

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \\ &\qquad \Longrightarrow \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\| = \|x_n - x_m\|_X + \|y_n - y_m\|_Y < \varepsilon. \quad (1)\end{aligned}$$

ノルムの定義から，$\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$, $\|y_n - y_m\|_Y < \varepsilon$ であるから，$\{x_n\}$ は X のコーシー列であり，$\{y_n\}$ は Y のコーシー列である．X, Y は完備であるから，

$$\exists x \in X : \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0, \quad \exists y \in Y : \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_Y = 0.$$

このとき，(1) で $m \to \infty$ とすると，$n \geq N$ に対して，

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \leq \varepsilon.$$

すなわち，(x_n, y_n) は (x, y) に収束する．

関数解析学 I 演習問題 No. 5

［1］線形空間 X に 2 つのノルム $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ が定義されていて，同値であるものとする．今，X が $\|\cdot\|_1$ に関して完備であるとき，$\|\cdot\|_2$ に関しても完備であることを示せ.

関数解析学 I 演習問題 No. 5 解答例

［２］$\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ が同値であるから，

$$\exists c, c' > 0 : c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c'\|x\|_2, \quad \forall x \in X.$$

今，点列 $\{x_n\}$ を $\|\cdot\|_2$ に関してコーシー列をなすとすると，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon / c'.$$

このとき，$\|x_n - x_m\|_1 \leq c'\|x_n - x_m\|_2 = \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$ となるので，$\{x_n\}$ は $\|\cdot\|_1$ に関してコーシー列となる．X は $\|\cdot\|_1$ に関して完備であるので，$x \in X$ が存在して，$\|x_n - x\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ となる．$\|x_n - x\|_2 \leq \frac{1}{c}\|x_n - x\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，X は $\|\cdot\|_2$ に関しても完備である．

関数解析学 I 演習問題 No. 6

［１］区間 $[0,1]$ で定義された多項式全体を X_0 とする．この空間の要素 $x = x(t)$ に対して，

$$\|x\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

とおくと，ノルムとなり，X_0 はノルム空間である．次を示せ．
(i) X_0 は完備ではない．
(ii) X_0 の完備化は $C([0,1])$ と等長なノルム空間である．

関数解析学 I 演習問題 No. 6 解答例

［1］(i) $e^t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j$ は一様収束である．したがって，多項式

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} t^j$$

は与えられたノルムに関してコーシー列を作る．しかしその極限 e^t は多項式ではない．

(ii) Weierstrass の多項式近似定理より，任意の $f \in C([0,1])$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，多項式 $P(t)$ が存在して，$\|f - P\| < \varepsilon$. となる．すなわち，X_0 は $C([0,1])$ で稠密であるから，X_0 の完備化は $C([0,1])$ に等長である．

関数解析学 I　演習問題 No.　7

X を内積 $(\cdot,\cdot)$ が定義されている $\mathbb{C}$ 上のプレヒルベルト空間とする．

［１］次を証明せよ．

(i) $(x, y_1+y_2)=(x,y_1)+(x,y_2)$.

(ii) $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y)$

（ただし，$x,y,y_1,y_2\in X, \alpha\in\mathbb{C}$ とする）．

［２］任意の $\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{C}$ と $x_j,y_j\in X$ $(j=1,2,\ldots,n)$ に対して，

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{n}\beta_k y_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\overline{\beta_k}(x_j,y_k)$$

となることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

関数解析学 I　演習問題 No.　7　解答例

［１］(i) $(x, y_1+y_2) = \overline{(y_1+y_2, x)} = \overline{(y_1, x)+(y_2, x)} = \overline{(y_1, x)}+\overline{(y_2, x)} = (x, y_1)+(x, y_2)$.
(ii) $(x, \alpha y) = \overline{(\alpha y, x)} = \overline{\alpha(y, x)} = \overline{\alpha}(x, y)$.

［２］$n=1$ のとき,［１］から，$(\alpha_1 x_1, \beta_1 y_1) = \alpha_1(x_1, \beta_1 y) = \alpha\overline{\beta_1}(x_1, y_1)$.
$n = l$ のとき成立すると仮定する．$n = l+1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{l+1}\alpha_j x_j, \sum_{k=1}^{l+1}\beta_j y_j\right) &= \left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_j x_j + \alpha_{l+1}x_{l+1}, \sum_{k=1}^{l}\beta_j y_j + \beta_{l+1}y_{l+1}\right)\\
&= \left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_j x_j, , \sum_{k=1}^{l}\beta_j y_j\right) + \overline{\beta_{l+1}}\left(\sum_{j=1}^{l}\alpha_j x_j, y_{l+1}\right)\\
&\quad +\alpha_{l+1}\left(x_{l+1}, \sum_{k=1}^{l}\beta_k y_k\right) + \alpha_{l+1}\overline{\beta_{l+1}}(y_{l+1}, x_{l+1})\\
&= \sum_{j,k=1}^{l}\alpha_j\overline{\beta_k}(x_j, y_k) + \sum_{j=1}^{l}\alpha_j\overline{\beta_{l+1}}(x_j, y_{l+1})\\
&\quad +\sum_{k=1}^{l}\overline{\beta_k}\alpha_{l+1}(x_{l+1}, y_k) + \alpha_{l+1}\overline{\beta_{l+1}}(x_{l+1}, y_{l+1})\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_j\overline{\beta_k}(x_j, y_k).
\end{aligned}
$$

関数解析学Ｉ 演習問題 No. ８

［１］ X, Y を内積 $(\cdot,\cdot)_X, (\cdot,\cdot)_Y$ をもつヒルベルト空間とする．このとき，直積空間 $X \times Y$ に内積を

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2))_{X\times Y} = (x_1, x_2)_X + (y_1, y_2)_Y \quad (x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y)$$

と定義すると，$X \times Y$ はヒルベルト空間となることを証明せよ．

関数解析学 I　演習問題 No. ８ 解答例

［１］ 内積空間となること：

$$\begin{aligned}
((x_1,y_1),(x_1,y_1))_{X\times Y} &= (x_1,x_1)_X+(y_1,y_1)_Y \geq 0. \\
((x_1,y_1),(x_1,y_1))_{X\times Y} &= (x_1,x_1)_X+(y_1,y_1)_Y = 0 \Longleftrightarrow x_1=0, y_1=0 \\
&\Longleftrightarrow (x_1,y_1)=(0,0). \\
(\alpha(x_1,y_1),(x_2,y_2))_{X\times Y} &= (\alpha x_1,x_2)_X+(\alpha y_1,y_2)_Y \\
&= \alpha(x_1,x_2)_X+\alpha(y_1,y_2)_Y \\
&= \alpha((x_1,y_1),(x_2,y_2))_{X\times Y}. \\
((x_1,y_1)+(x_2,y_2),(x_3,y_3))_{X\times Y} &= (x_1+x_2,x_3)_X+(y_1+y_2,y_3)_Y \\
&= (x_1,x_3)_X+(x_2,x_3)_X+(y_1,y_3)_Y+(y_2,y_3)_Y \\
&= ((x_1,y_1),(x_3,y_3))_{X\times Y}+((x_2,y_2),(x_3,y_3))_{X\times Y}.
\end{aligned}$$

完備性：$\{(x_n,y_n)\}$ を $X\times Y$ のコーシー列とする．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して，番号 $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$n,m\geq N$ のとき，

$$\|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|_{X\times Y}<\varepsilon$$

となる．このとき，

$$\|x_n-x_m\|_X^2+\|y_n-y_m\|_Y^2=\|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|_{X\times Y}^2<\varepsilon^2 \quad (n,m\geq N)$$

から，$\{x_n\}$ は X のコーシー列であり，$\{y_n\}$ は Y のコーシー列となる．X,Y はそれぞれ完備だから，$x\in X, y\in Y$ が存在して，$x_n\to x, y_n\to y$ となる．このとき，

$$\|(x_n,y_n)-(x,y)\|_{X\times Y}^2=\|x_n-x\|_X^2+\|y_n-y\|_Y^2\to 0$$

となり，$X\times Y$ は完備である．

関数解析学Ｉ 演習問題 No. ９

［１］L をヒルベルト空間 H における閉部分空間とする．このとき，$(L^{\perp})^{\perp} = L$ を証明せよ．

関数解析学 I 演習問題 No. 9 解答例

［1］$L \subset (L^{\perp})^{\perp}$ を示す．

$x \in L$ とすると，任意の $y \in L^{\perp}$ に対して，$(x, y) = 0$ となる．x は $L^{\perp}$ に直交するのだから，$x \in (L^{\perp})^{\perp}$ となる．

$(L^{\perp})^{\perp} \subset L$ を示す．

$x \in (L^{\perp})^{\perp}$ とすると，直交直和分解 $H = L \oplus L^{\perp}$ により，$x = y + z \quad (y \in L, z \in L^{\perp}$ と書ける．$x \in (L^{\perp})^{\perp}, z \in L^{\perp}$ であるから，$(x, z) = 0$. また，$y \in L$ であるから，$(y, z) = 0$ となり，$(z, z) = (x, z) + (y, z) = 0$. したがって，$z = 0$ となる．すなわち，$x = y \in L$.

関数解析学Ｉ 演習問題 No. １０

［１］$\{\sqrt{2}\sin \pi j t\}_{j=1}^{\infty}$ は $L^2(0,1)$ で正規直交系をなす事を示せ.
ヒント：

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big].$$

関数解析学Ｉ 演習問題 No. １０ 解答例

$(\sqrt{2}\sin\pi jt, \sqrt{2}\sin\pi kt) = \delta_{jk}$ を示せばよい．ヒントを使って，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}\sin\pi jt, \sqrt{2}\sin\pi kt) &= 2\int_0^1 \sin\pi jt \sin\pi kt dt \\ &= \int_0^1 (\cos\pi(j-k)t - \cos\pi(j+k)t)dt.\end{aligned}$$

$j = k$ のとき，最後の積分は，

$$\int_0^1 (1-\cos 2\pi jt)dt = 1 - \frac{1}{2\pi j}\left[\sin 2\pi jt\right]_0^1 = 1$$

となる．$j \neq k$ のときは，上の等式の最後の積分は

$$\left[\frac{1}{\pi(j-k)}\sin\pi(j-k)t - \frac{1}{\pi(j+k)}\sin\pi(j+k)t\right]_0^1 = 0.$$

となる．

関数解析学 I　演習問題 No. １１

［１］$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を K 上のヒルベルト空間 X の正規直交系とする．$\{x_k\}$ によって生成される部分空間を L_0 とする．すなわち，

$$L_0 = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k ; \alpha_k \in K, n \text{ は任意の自然数} \right\}$$

このとき，次を示せ．
(i) L_0 は部分空間である．
(ii) $L = \overline{L_0}$ は閉部分空間である．

ヒント：(i) $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$ とするとき，任意の $\lambda, \mu \in K$ に対して，$\lambda x + \mu y \in L_0$ を示す．
$n > m$ のときは，$\beta_{m+1} = \cdots = \beta_n = 0$ として，$y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$ と書くとわかりやすい．
(ii) L が閉集合であることは明らか．

$$x \in L \Longleftrightarrow \exists y_n \in L_0 : y_n \to x \quad (n \to \infty).$$

$x, y \in L$, $\lambda, \mu \in K$ として，

$$\exists z_n \in L_0 : z_n \to x, \quad \exists w_n \in L_0 : w_n \to y.$$

このとき，$\lambda z_n + \mu w_n \in L_0$ であり，

$$\lambda z_n + \mu w_n \to \lambda x + \mu y \quad (n \to \infty).$$

関数解析学 I 演習問題 No. １１ 解答例

［１］(i) $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k x_k$ とするとき，任意の $\lambda, \mu \in K$ に対して，$\lambda x + \mu y \in L_0$ を示す.
$n > m$ のときは，$\beta_{m+1} = \cdots = \beta_n = 0$ として，$y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$ と書く. また，$n < m$ のときは，$\alpha_{n+1} = \cdots = \alpha_m = 0$ として，$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ と書くと，$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$ として，一般性を失わない.

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k) + \mu(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda \alpha_k + \mu \beta_k) x_k \in L_0. \end{aligned}$$

(ii) L が閉集合であることは明らか.

$$x \in L \Longleftrightarrow \exists y_n \in L_0 : y_n \to x \quad (n \to \infty).$$

$x, y \in L$, $\lambda, \mu \in K$ として，

$$\exists z_n \in L_0 : z_n \to x, \quad \exists w_n \in L_0 : w_n \to y.$$

このとき，$\lambda z_n + \mu w_n \in L_0$ であり，

$$\lambda z_n + \mu w_n \to \lambda x + \mu y \quad (n \to \infty).$$

関数解析学Ｉ 演習問題 No. １２

［１］$X = L^2(-2,2)$ とする．このとき，空間 $M = \{u \in X; u(x) = u(-x) \text{ a.e. }\}$ の直交補空間を求めよ．
ヒント： $u \in X$ は

$$u(t) = \frac{u(t)+u(-t)}{2} + \frac{u(t)-u(-t)}{2}$$

と書ける．

$$u_1(t) = \frac{u(t)+u(-t)}{2}, \quad u_2(t) = \frac{u(t)-u(-t)}{2}$$

とおけば，$u_1 \perp u_2$ であることに注意すれば良い．

関数解析学Ｉ 演習問題 No. １２ 解答例

［１］M は閉部分空間である．なぜならば，M が部分空間であることは明らか．$u_n \in M, \quad u_n \to u$ in $L^2(-2,2)$ とする．このとき，適当な部分列 $\{u_{n_k}\}$ をとれば，$u_{n_k} \to u$ a.e. となる．$u_{n_k}(-t) = u_{n_k}(t)$ a.e. であるから，$u(-t) = u(t)$ a.e. となる．すなわち，$u \in M$.

直交直和分解定理から，$X = M \oplus M^{\perp}$ と書ける．$u \in X$ をヒントのように分解して，$u = u_1 + u_2$, $u_1(t)\overline{u_2(t)}$ は奇関数であるから，

$$(u_1, u_2) = \int_{-2}^{2} u_1(t)\overline{u_2(t)}dt = 0.$$

これより，$u_2 \in M^{\perp}$. したがって，$M^{\perp} = \{u \in X; u(t) = -u(-t) \text{ a.e. }\}$. 実際，$u$ が $u(t) = -u(-t)$ a.e. をみたしていれば，任意の $v \in M$ に対して，$u(t)\overline{v(t)}$ は奇関数であるから，

$$\int_{-2}^{2} u(t)\overline{v(t)}dt = 0.$$

したがって，$M^{\perp} \supset \{u \in X; u(t) = -u(-t) \text{ a.e. }\}$. 一方，$u \in M^{\perp}$ とすると，直交直和分解から，ヒントのように，$u = u_1 + u_2 \quad (u_1 \in M, u_2 \in M^{\perp}$ と書ける．$u \in M^{\perp}$ であるから，

$$0 = (u, u_1) = (u_1 + u_2, u_1) = (u_1, u_1).$$

したがって，$u = u_2 \in \{u \in X; u(t) = -u(-t) \text{ a.e. }\}$. このように，$M^{\perp} \subset \{u \in X; u(t) = -u(-t) \text{ a.e. }\}$.